

**I. PHẦN CHUNG ( Cho tất cả thí sinh )**

**Câu I ( 2 điểm ).** Cho hàm số  $y = \frac{2x-4}{x+1}$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số .

2) Tìm trên đồ thị (C) hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng MN, biết  $M(-3;0)$ ,  $N(-1;-1)$ .

**Câu II ( 2 điểm ).** Giải các phương trình, bất phương trình sau

1)  $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \right]$ .

2)  $4(x+1)^2 < (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$

**Câu III ( 1 điểm ).** Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} x(\cos x + \sin^5 x) dx$

**Câu IV ( 1 điểm ).** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thoi cạnh bằng a và góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Hai mặt chéo  $(ACC'A')$  và  $(BDD'B')$  cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, B'C', biết rằng MN vuông góc với BD'. Tính thể tích của khối hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .

**Câu V ( 1 điểm ).** Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng

$$\frac{52}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

**II. PHẦN TỰ CHỌN ( Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B )**

**A. Theo chương trình Chuẩn**

**Câu VIa ( 2 điểm )**

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh  $B(1;5)$  và phương trình đường cao  $AD: x+2y-2=0$ , đường phân giác góc C là  $CC': x-y-1=0$ . Tính tọa độ các đỉnh A và C.

2) Viết phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua điểm  $A(1;1;1)$  và vuông góc với đường thẳng

$(\Delta'): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$  và cách điểm  $B(2;0;1)$  một khoảng lớn nhất.

**Câu VIIa ( 1 điểm )** Với  $n$  là số nguyên dương, chứng minh hệ thức

$$\left(C_n^1\right)^2 + 2\left(C_n^2\right)^2 + 3\left(C_n^3\right)^2 + \dots + (n-1)\left(C_n^{n-1}\right)^2 + n\left(C_n^n\right)^2 = \frac{n}{2} C_{2n}^n$$

**B. Theo chương trình Nâng cao**

**Câu VIb ( 2 điểm )**

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$  và Parabol  $(P): y^2 = x$ . Tìm trên  $(P)$  các điểm M mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến tới đường tròn  $(C)$  và hai tiếp tuyến này tạo với nhau một góc bằng  $60^\circ$ .

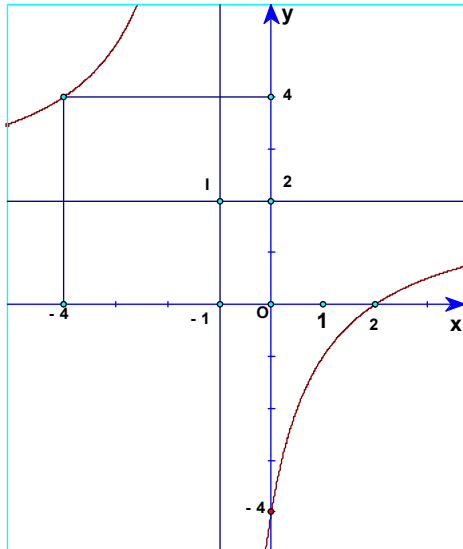
2) Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng  $(P): 2x + y + z - 1 = 0$  và đường thẳng  $(d)$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(Q): 2x - y - 2 = 0$  và  $(R): y + 2z + 2 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua giao điểm A của  $(d)$  và  $(P)$ ;  $(\Delta)$  nằm trong  $(P)$  và góc tạo bởi hai đường thẳng  $(\Delta)$  và  $(d)$  bằng  $45^\circ$ .

**Câu VIIb ( 1 điểm ).** Người ta sử dụng 5 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Vật lí, 7 cuốn sách Hóa học ( các cuốn sách cùng loại giống nhau ) để làm giải thưởng cho 9 học sinh, mỗi học sinh được hai cuốn sách khác loại. Trong số 9 học sinh trên có hai bạn Ngọc và Thảo. Tìm xác suất để hai bạn Ngọc và Thảo có giải thưởng giống nhau.

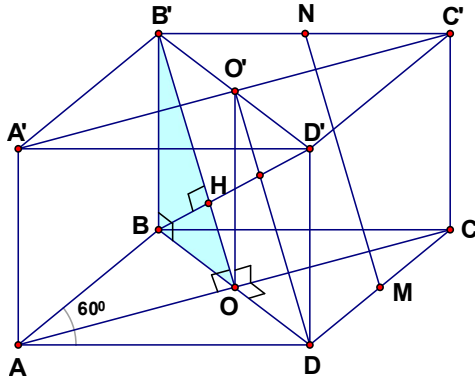
*Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

Cảm ơn ([saithanh@gmail.com](mailto:saithanh@gmail.com)) gửi tới [www.laisac.page.tl](http://www.laisac.page.tl)

*Đáp án này có 5 trang.*

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM												
<b>Câu I</b> (2 điểm)	1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$													
	<p>* Tập xác định <math>D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}</math></p> <p>Giới hạn, tiệm cận: <math>\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty</math>; <math>\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty</math>. Suy ra phương trình đường tiệm cận đứng <math>x = -1</math> <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2</math>; <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2</math>. Suy ra phương trình đường tiệm cận ngang <math>y = 2</math></p> <p>* Sự biến thiên: <math>y' = \frac{6}{(x+1)^2} &gt; 0</math>; <math>\forall x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)</math> nên hàm số đồng biến trong từng khoảng xác định của nó.</p> <p>* Bảng biến thiên</p> <table><tr><td>x</td><td><math>-\infty</math></td><td>-1</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td><math>+\infty</math></td><td>2</td></tr></table> <p>* Đồ thị: Đồ thị phải đi qua các điểm đặc biệt (2,0); (0,-4); (-4,4) Nhận xét: đồ thị có tâm đối xứng là điểm <math>I(-1;2)</math></p> 	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	y'	+		+	y	2	$+\infty$	2	0,25  
x	$-\infty$	-1	$+\infty$											
y'	+		+											
y	2	$+\infty$	2											

	Vậy $A(2;0); B(0;-4)$ hoặc $B(2;0); A(0;-4)$	0,25
<b>Câu II</b> (2 điểm)	1) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \right]$ .	
	Điều kiện xác định $\sin x \neq 0$ hay $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ Phương trình đã cho tương đương với $(\cos 2x + \sin 2x)\sin^2 x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\sin x$ $\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)(\sin x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$ So với điều kiện nghiệm của phương trình là $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} + m2\pi; (k, m \in \mathbb{Z})$	0,25 0,25 0,25 0,25
	2) $4(x+1)^2 < (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$	
	Điều kiện xác định $x \geq -\frac{3}{2}$ $4(x+1)^2 < (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2 \Leftrightarrow 4(x+1)^2 < \frac{(2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2(1+\sqrt{3+2x})^2}{(1+\sqrt{3+2x})^2}$ $\Leftrightarrow 4(x+1)^2 < \frac{(2x+10)4(x+1)^2}{(1+\sqrt{3+2x})^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 1 < \frac{(2x+10)}{(1+\sqrt{3+2x})^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (1+\sqrt{3+2x})^2 < 2x+10 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x+4+2\sqrt{3+2x} < 2x+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \sqrt{3+2x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 3 \end{cases}$ Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{3}{2}; 3\right) \setminus \{-1\}$	0,25 0,25 0,25 0,25
<b>Câu III</b> (1 điểm)	Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x(\cos x + \sin^5 x) dx$	
	$* I = \int_0^{\pi} x(\cos x + \sin^5 x) dx = \underbrace{\int_0^{\pi} x \cos x dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi} x \sin^5 x dx}_{I_2}$	0,25
	$* I_1 = \int_0^{\pi} x \cos x dx = x \sin x \Big _0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = x \sin x \Big _0^{\pi} + \cos x \Big _0^{\pi} = -2$	0,25
	$* \text{Với } I_2 \text{ ta đặt } x = \pi - t \Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x)^2 d(-\cos x) = \frac{8\pi}{15}$	0,25
	$* \text{Vậy } I = \frac{8\pi}{15} - 2$	0,25

<b>Câu IV</b> <b>(1 điểm)</b>	Tính theo a thể tích hình chóp S.ABMN.	
	<p>* Từ giả thiết ta có <math>S_{ABCD} = a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}</math></p> 	0,25
	<p>* Gọi O, O' lần lượt là tâm hai đáy ABCD và A'B'C'D' từ giả thiết</p> $\begin{cases} (ACC'A') \perp (ABCD) \\ (BDD'B') \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow OO' \perp (ABCD)$ <p>mà <math>OO' \parallel AA'</math>, nên ta có hình hộp đã cho là hình hộp đứng</p>	0,25
	<p>* <math>MN \parallel OB'</math> và <math>MN \perp BD' \Rightarrow OB' \perp BD'</math> nên trong hình chữ nhật BDD'B' ta có <math>BD' \perp B'O</math>. Gọi H là giao điểm của B'O và BD', khi đó ta có <math>BH = \frac{1}{3}BD'</math> và sử dụng hệ thức <math>B'O \cdot BH = BB' \cdot BO</math> ta có <math>BD = \sqrt{2}BB' \Rightarrow BB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}</math></p>	0,25
	Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot BB' = \frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$ ( đvtt )	0,25
<b>Câu V</b> <b>(1 điểm)</b>	Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng	
	$\frac{52}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$	
	<p>Ta có <math>\frac{a+b+c}{2} = p \Rightarrow p-a; p-b; p-c</math> là các số dương</p> <p>Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương <math>1-a; 1-b; 1-c</math> ta có</p> $0 < (1-a)(1-b)(1-c) \leq \left[ \frac{3-(a+b+c)}{3} \right]^3 = \frac{1}{27}$	0,25
	$\Leftrightarrow 1 < ab+bc+ca-abc \leq \frac{28}{27} \Leftrightarrow 2 < 2(ab+bc+ca)-2abc \leq \frac{28}{27}$	0,25
	$\Leftrightarrow 2 < (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2+2abc) \leq \frac{56}{27}$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{52}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ <p>Đẳng thức bên trái xảy ra khi <math>a = b = c = \frac{2}{3}</math></p>	0,25

<b>Câu VIa</b> (2 điểm)	<p>1) Tính tọa độ các đỉnh A và C.</p> <p>* Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AD nên có phương trình là  <math display="block">BC: 2x - y + 3 = 0</math></p> <p>* <math>C = BC \cap CC'</math> tọa độ của C là nghiệm của hệ <math>\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C(-4; -5)</math></p> <p>* Gọi B' là điểm đối xứng của B qua đường thẳng CC' khi đó B' thuộc đường thẳng AC          Pt <math>BB'</math>: <math>x + y - 6 = 0</math>. <math>K = BB' \cap CC' \Rightarrow K\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)</math> là trung điểm BB' suy ra <math>B'(6; 0)</math></p> <p>* Đường thẳng AC qua C và B' <math>\Rightarrow AC: x - 2y - 6 = 0</math></p> <p><math>A = AC \cap AD</math> nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ <math>\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(4; -1)</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	<p>2) Viết phương trình đường thẳng <math>(\Delta)</math> ...</p> <div data-bbox="284 682 657 976"> </div> <p>* <math>(\Delta)</math> phải thuộc mặt phẳng <math>(\alpha)</math> đi qua A và vuông góc với <math>(\Delta')</math> suy ra vptpt <math>\vec{n}_\alpha = (1; 1; 2)</math></p> <p>* Kẻ <math>BK \perp (\Delta)</math> ta có  <math>BK = d[B; (\Delta)] \leq AB \Rightarrow d[B; (\Delta)]_{\max} = AB \Leftrightarrow K \equiv A</math></p> <p>* <math>\begin{cases} (\Delta) \subset (\alpha) \\ (\Delta) \perp AB \end{cases}</math> suy ra véc-tơ chỉ phương của <math>(\Delta)</math> là  <math display="block">\vec{v} = \frac{1}{2}[\vec{n}_\alpha; \vec{AB}] = (1; 1; -1)</math></p> <p>* Phương trình đường thẳng <math>(\Delta)</math> là <math>\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<b>Câu VIIa</b> (1 điểm)	<p>Chứng minh <math>(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \dots + (n-1)(C_n^{n-1})^2 + n(C_n^n)^2 = \frac{n}{2} C_{2n}^n</math></p> <p>Đặt <math>S = 0.(C_n^0)^2 + 1.(C_n^1)^2 + 2.(C_n^2)^2 + 3.(C_n^3)^2 + \dots + (n-1)(C_n^{n-1})^2 + n(C_n^n)^2</math></p> <p>Ta có <math>2S = n. \left[ (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2 \right]</math></p> <p>Khai triển hai nhị thức <math>(1+x)^n (1+x)^n</math> và <math>(1+x)^{2n}</math> rồi so sánh hệ số của <math>x^n</math> ta được  <math>(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n</math>; <math>(1+x)^n = C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^{n-2} x^{n-2} + \dots + C_n^1 x^1 + C_n^0</math></p> <p><math>(1+x)^n (1+x)^n = \dots \left[ (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2 \right] x^n + \dots</math>, do <math>C_n^k = C_n^{n-k}</math></p> <p><math>(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + \dots + C_{2n}^n x^n + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}</math></p> <p><math>(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n</math> từ đó suy ra ĐPCM</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<b>Câu VIb.</b> (2 điểm)	<p>1) Tìm các điểm M trên <math>(P): y^2 = x</math> ...</p> <p>1) Đường tròn (C) tâm <math>O(0; 0)</math>, bán kính <math>r = \frac{\sqrt{6}}{2}</math> và <math>M \in (P) \Leftrightarrow M(t^2; t)</math></p> <p>theo YCBT ta có <math>OM = \sqrt{2} \vee OM = \sqrt{6}</math>  <math>\Rightarrow t \in \{\pm 1; \pm \sqrt{2}\}</math></p> <p>Vậy có bốn điểm M là <math>M_1 = (1; 1)</math>, <math>M_2 = (1; -1)</math>, <math>M_3 = (2; \sqrt{2})</math>, <math>M_4 = (2; -\sqrt{2})</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

	<p>2) Viết phương trình đường thẳng (<math>\Delta</math>) ...</p> <p>* Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ <math>\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x - y = 2 \\ y + 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 0; -1)</math></p> <p>Đường thẳng (d) có véc-tơ chỉ phương là <math>\vec{v} = (1; 2; -1)</math></p> <p>* Gọi véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (<math>\Delta</math>) là <math>\vec{u} = (a; b; c)</math>, <math>a^2 + b^2 + c^2 \neq 0</math></p> <p>Theo YCBT ta có <math>\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n}_{(p)} = 0 \\ \cos[(\Delta); (d)] = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ \frac{ a + 2b - c }{\sqrt{6} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}</math></p> <p>* Giải hệ này ta được <math>\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 + \sqrt{3} \\ c = -1 - \sqrt{3} \end{cases}</math> hoặc <math>\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - \sqrt{3} \\ c = -1 + \sqrt{3} \end{cases}</math></p> <p>* Vậy có hai đường thẳng thỏa YCBT là</p> <p><math>(\Delta_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1+\sqrt{3}} = \frac{z+1}{1-\sqrt{3}}</math>, <math>(\Delta_2): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1-\sqrt{3}} = \frac{z+1}{1+\sqrt{3}}</math></p>
<p><b>Câu VIIb.</b> (1 điểm)</p>	<p>Tìm xác suất để hai bạn Ngọc và Thảo có giải thưởng giống nhau.</p> <p>* Giả sử có <math>x</math> học sinh nhận sách Toán và Vật lí  <math>y</math> học sinh nhận sách Toán và Hóa học  <math>z</math> học sinh nhận sách Vật lí và Hóa học  Ta có <math>x + y = 5</math>, <math>x + z = 6</math>, <math>y + z = 7</math>, <math>x + y + z = 9</math> suy ra <math>x = 2</math>, <math>y = 3</math>, <math>z = 4</math>  Vậy chỉ có 2 học sinh nhận sách Toán và Vật lí, 3 học sinh nhận sách Toán và Hóa học, 4 học sinh nhận sách Vật lí và Hóa học.</p> <p>* Số khả năng chia sách cho 9 bạn là <math>n(\Omega) = C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = 1260</math>.</p> <p>* Gọi A là biến cố hai bạn Ngọc và Thảo nhận sách giống nhau, xảy ra ba khả năng:  Khả năng thứ nhất:  Hai bạn Ngọc và Thảo cùng nhận sách Toán và Vật Lí, khi đó 7 bạn còn lại có 3 bạn nhận sách Toán và Hóa; 4 bạn nhận sách Vật lí và Hóa học. Số cách phân chia là <math>C_7^3 \cdot C_4^4 = 35</math>.  Khả năng thứ hai:  Hai bạn Ngọc và Thảo cùng nhận sách Toán và Hóa, tương tự có <math>C_7^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^4 = 105</math> cách.  Khả năng thứ ba:  Hai bạn Ngọc và Thảo cùng nhận sách Lí và Hóa, tương tự có <math>C_7^2 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 210</math> cách.</p> <p>* Suy ra <math>P(A) = 350/1260 = 5/18</math>.</p>

Cảm ơn ([saithanh@gmail.com](mailto:saithanh@gmail.com)) gửi tới [www.laisac.page.tl](http://www.laisac.page.tl)