إعداد الأستاذ: أضرضور مصطفى

التمرين الأول

1) أ-

لدينا $A(-1,1,0)$ و $B(1,0,1)$ اذن $\vec{OA}(-1,1,0)$ و $\vec{OB}(1,0,1)$

$$\vec{OA}\wedge\vec{OB}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & \vec{i}\\ 1 & 0 & \vec{j}\\ 0 & 1 & \vec{k}\end{vmatrix}=(1-0)\vec{i}-(-1-0)\vec{j}+(0-1)\vec{k}=\boxed{\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}$$

– لدينا المتجهة المنظمية على المستوى (OAB) هي $\vec{OA}\wedge\vec{OB}(1,1,-1)$

لدينا $(OAB): ax+by+cz+d=0$

يعني $x+y-z+d=0$

نختار إحداثيات O النقطة لتحديد قيمة d

يعني $0+0-0+d=0$

ومنه $d=0$

وبالتالي $\boxed{(OAB): x+y-z=0}$

ب-

لدينا $\Omega(1,1,-1)$ و $(OAB): x+y-z=0$

ومنه $d(\Omega,(OAB))=\dfrac{|x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$

يعني $=\dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$

يعني $=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

إذن $\boxed{=\sqrt{3}}$

بما أن $d(\Omega,(OAB))\prec r$ فان المستوى (OAB) يقطع الفلك (S) وفق دائرة (Γ)

التي شعاعها $R=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{3^2-\sqrt{3}^2}\ \boxed{=\sqrt{6}}$

2) أ-

بما أن المستقيم (Δ) يمر من النقطة $\Omega(1,1,-1)$ وعمودي على المستوى (OAB)

فإن $\vec{OA}\wedge\vec{OB}(1,1,-1)$ متجهة موجهة له .

إذن التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) هو : $(\Delta) : \begin{cases} x = x_\Omega + t \\ y = y_\Omega + t \\ z = z_\Omega - t \end{cases} , \quad t \in R$

وبالتالي $\boxed{(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} , \quad t \in R}$

ب-

لدينا $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} , \quad t \in R$ و $(OAB) : x + y - z = 0$

إذن $(1+t)+(1+t)-(-1-t)=0$

يعني $1+t+1+t+1+t=0$

يعني $3+3t=0$

يعني $3t=-3$

ومنه $t=-1$

لتكن النقطة H مركز الدائرة (Γ)

إذن $\begin{cases} x_H = 1 - 1 \\ y_H = 1 - 1 \\ z_H = -1 + 1 \end{cases}$ ومنه $\boxed{H(0,0,0)}$

التمرين الثاني

1) أ-

لدينا $(1+i)(-3+6i)=-3+6i-3i-6$

و منه $\boxed{=-9+3i}$

لدينا $\frac{c-a}{b-a}=\frac{-2+5i-7-2i}{4+8i-7-2i}$

يعني $=\frac{-9+3i}{-3+6i}$

يعني $=\frac{(1+i)\cancel{(-3+6i)}}{\cancel{-3+6i}}$

وبالتالي $\boxed{=1+i}$

ب-

لنحدد الشكل المثلثي للتعبير $\frac{c-a}{b-a}$ يعني الشكل المثلثي للعدد العقدي $1+i$

لدينا $|1+i|=\sqrt{2}$

يعني $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

يعني $=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

وبالتالي $=\left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4}\right]$

لدينا $|1+i|=\frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$ و منه $AC=\sqrt{2}AB$

و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) أ-

لدينا التمثيل العقدي للدوران هو : $z'-b=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-b)$

يعني $z'-b=(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}))(z-b)$

يعني $z'-b=i(z-b)$

يعني $z'=iz-ib+b$

وبما أن النقطة D صورة النقطة A

يعني $z_D=iz_A+4i+12$

يعني $z_D=i(7+2i)+4i+12$

يعني $z_D=7i-2+4i+12$

اذن $\boxed{z_D=10+11i}$

ب-

لدينا $\frac{d-c}{b-c}=\frac{10+11i-(-2+5i)}{4+8i-(-2+5i)}$

يعني $=\frac{10+11i+2-5i}{4+8i+2-5i}$

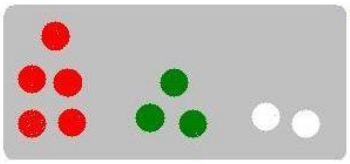
يعني $=\frac{12+6i}{6+3i}$

يعني $=\frac{2\cancel{(6+3i)}}{\cancel{6+3i)}}$

إذن $=2$

بما أن $2\in\mathbb{R}$ فإن النقط C و B و D مستقيمية

التمرين الثالث



نسحب من الصندوق **4** كرات في آن واحد

- أولا سوف نحسب كون الإمكانيات Ω .

$$card(\Omega) = C_{10}^{4} = 210$$

الحدث A : الحصول على كرتين حمراوين و كرتين خضراوين .

$$p(A) = \frac{C_5^2 . C_3^2}{210} = \frac{30}{210} = \boxed{\frac{1}{7}}$$ يعني

الحدث B : لاتوجد أية كرة بيضاء من بين الكرات الأربع المسحوبة .

$$p(B) = \frac{C_8^4}{210} = \frac{70}{210} = \boxed{\frac{1}{3}}$$ يعني

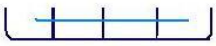
أ - بما أن عدد الكرات البيضاء الموجود في الصندوق كرتان .

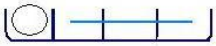
فيمكننا أن لا نأخذ أي كرة بيضاء عند السحب أو يمكننا أخذ كرة واحدة أو كرتان

إذن القيم التي يأخذها x هي 0 و 1 و 2

ب - لدينا اذن $$p(x=1) = \frac{C_2^1 . C_8^3}{210} = \frac{112}{210} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

قانون الإحتمال :

$x_0 =$  يعني $$x_0 = \frac{C_8^4}{210} = \frac{1}{3}$$

$x_1 =$  يعني $$x_1 = \frac{C_2^1 . C_8^3}{210} = \frac{8}{15}$$

$x_2 =$ يعني $$x_2 = \frac{C_2^2 . C_8^2}{210} = \frac{2}{15}$$

التمرين الرابع

1)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $u_{n+1}=\dfrac{25}{10-u_n}$ و $u_1=0$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

لدينا $5-u_{n+1}=5-\dfrac{25}{10-u_n}=\dfrac{5(10-u_n)}{10-u_n}-\dfrac{25}{10-u_n}$

يعني $=\dfrac{5(10-u_n)-25}{10-u_n}$

يعني $=\dfrac{50-5u_n-25}{10-u_n}$

يعني $=\dfrac{25-5u_n}{10-u_n}$

يعني $=\dfrac{5(5-u_n)}{10-u_n}$

إذن $\boxed{=\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}}$

البرهان بالترجع : لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*: 5-u_n\succ 0$

- أساس الترجع

من أجل $n=1$

لدينا $5-u_1=5\succ 0$ عبارة صحيحة

- فرضية الترجع

. نفترض أن $5-u_n\succ 0$

. ولنبين أن $5-u_{n+1}\succ 0$

لدينا $5-u_{n+1}=\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ وبماأن $5-u_n\succ 0$ موجب

فإن $\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ موجب أي أن $\boxed{5-u_{n+1}\succ 0}$

• نتيجة

لكل n من $\mathbb{N}^*$: $5-u_n \succ 0$

2) أ-

نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بمايلي $v_n=\dfrac{5}{5-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

لدينا $v_{n+1}=\dfrac{5}{5-u_{n+1}}$

يعني $=\dfrac{5}{5-\dfrac{25}{10-u_n}}$

يعني $=\dfrac{5}{\dfrac{5(10-u_n)-25}{10-u_n}}$

يعني $=\dfrac{5}{\dfrac{5(10-u_n-5)}{10-u_n}}$

يعني $=\dfrac{5}{\dfrac{5(5-u_n)}{10-u_n}}$

يعني $=5.\dfrac{10-u_n}{5(5-u_n)}$

ومنه $\boxed{=\dfrac{10-u_n}{(5-u_n)}}$

يمكنك ايضا وضع $5-u_{n+1}=\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ عند الحساب

لدينا $v_{n+1}-v_n=\dfrac{10-u_n}{5-u_n}-\dfrac{5}{5-u_n}=\dfrac{10-u_n-5}{5-u_n}=\dfrac{5-u_n}{5-u_n}=1$

وبالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$ وحدها الأول هو $v_1=1$

ب- لدينا علاقة الحد العام لمتتالية حسابية (v_n) هي $v_n = v_p + (n-p).r$

يعني $v_n = v_1 + (n-1).1$

يعني $= 1 + (n-1)$

يعني $= 1 + n - 1$

إذن $\boxed{= n}$

لدينا $v_n = \dfrac{5}{5-u_n}$ يعني $v_n(5-u_n) = 5$

يعني $5v_n - v_n u_n = 5$

يعني $-v_n u_n = 5 - 5v_n$

يعني $v_n u_n = 5v_n - 5$

يعني $u_n = \dfrac{5v_n - 5}{v_n}$

يعني $u_n = 5 - \dfrac{5}{v_n}$

إذن $\boxed{u_n = 5 - \dfrac{5}{n}}$

ج- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} 5 - \dfrac{5}{n} = 5$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$

التمرين الخامس

1) أ-

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي : $f(x) = (x-2)^2.e^x$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)^2.e^x = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)^2 = \boxed{+\infty}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

ب-

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-2)^2.e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)^2.\dfrac{e^x}{x} = \boxed{+\infty}$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

إذن Cf يقبل فرع شلجمي إتجاهه محو الأراتيب بجوار $+\infty$

---

2) أ-

لدينا $f(x) = (x-2)^2.e^x$

يعني $= (x^2-4x+4).e^x$

إذن $\boxed{= x^2e^x - 4xe^x + 4e^x}$

ب-

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x - 4xe^x + 4e^x \boxed{= 0}$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 4xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ فإن Cf يقبل مقارب معادلته $y = 0$

3) أ-

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}: \quad f'(x) = ((x-2)^2.e^x)' = ((x-2)^2)'.e^x + (x-2)^2.e^{x\,'}$

يعني $= (2(x-2)'(x-2)).e^x + (x-2)^2.e^x$

يعني $= (2(x-2)).e^x + (x-2)^2.e^x$

يعني $= (x-2).e^x(2+(x-2))$

يعني $= (x-2).e^x(2+x-2)$

يعني $= (x-2).e^x x$

إذن $\boxed{= x(x-2).e^x}$

ب-

لدينا إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارة $x(x-2)$

إذن لدينا جدول الإشارات لـ $f'(x)$ هو

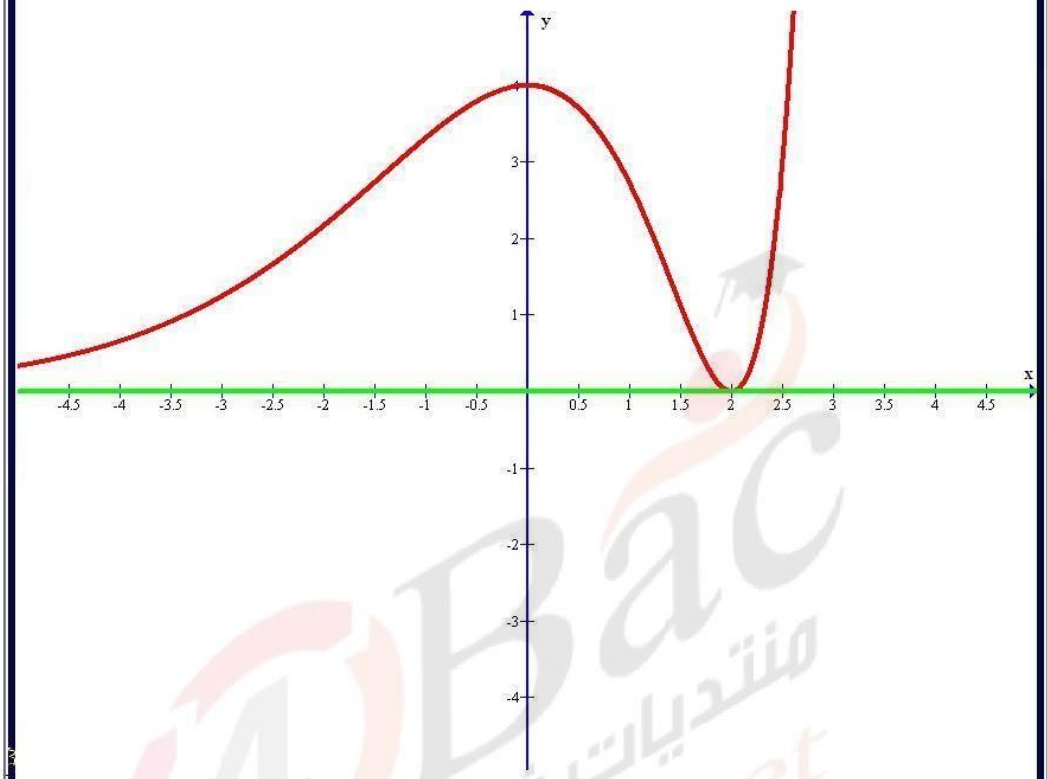
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن من خلال جدول الإشارات أعلاه نستنتج أن:

تزايدية على المجالين $]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$ و تناقصية على المجال $[0,2]$

ج- جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$



5) أ-

لدينا $H'(x) = ((x-1).e^x)'$

يعني $= (x-1)'.e^x + (x-1).e^x'$

يعني $= e^x + (x-1).e^x$

يعني $= e^x + xe^x - e^x$

يعني $= xe^x$

ومنه $= h(x)$

وبالتالي $H(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $h(x)$

لدينا $\int_0^1 xe^x dx = \left[(x-1).e^x\right]_0^1 = H(1) - H(0)$

يعني $= \left[(1-1).e^1\right] - \left[(0-1).e^0\right]$

يعني $= 0 - (-1)$

إذن $\boxed{= 1}$

ب- لنحسب $\int_0^1 x^2 e^x dx$

لدينا $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases}$

ومنه $\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx$

يعني $= \left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx$

يعني $= \left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx$

يعني $= 1^2 e^1 - 0^2 e^0 - 2.1$

إذن $\boxed{= e - 2}$

ج- حساب مساحة الحيز المحصور بين Cf ومحور الأفاصيل والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

لدينا $\int_0^1 f(x)dx.1cm.1cm = \int_0^1 x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x dx.cm^2$

يعني $= \int_0^1 x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x dx.cm^2$

يعني $= (\int_0^1 x^2 e^x dx - 4\int_0^1 xe^x dx + 4\int_0^1 e^x dx)cm^2$

بعني نعلم أن $\boxed{\int_0^1 xe^x dx = 1 \text{ و } \int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2 \text{ و } \int_0^1 e^x dx = e - 1}$

ومنه $= (e - 2 - 4 + 4(e-1))cm^2$

بعني $= (e - 2 - 4 + 4e - 4)cm^2$

يعني $= (5e - 10)cm^2$

إذن $\boxed{= 5(e-2)cm^2}$

6)

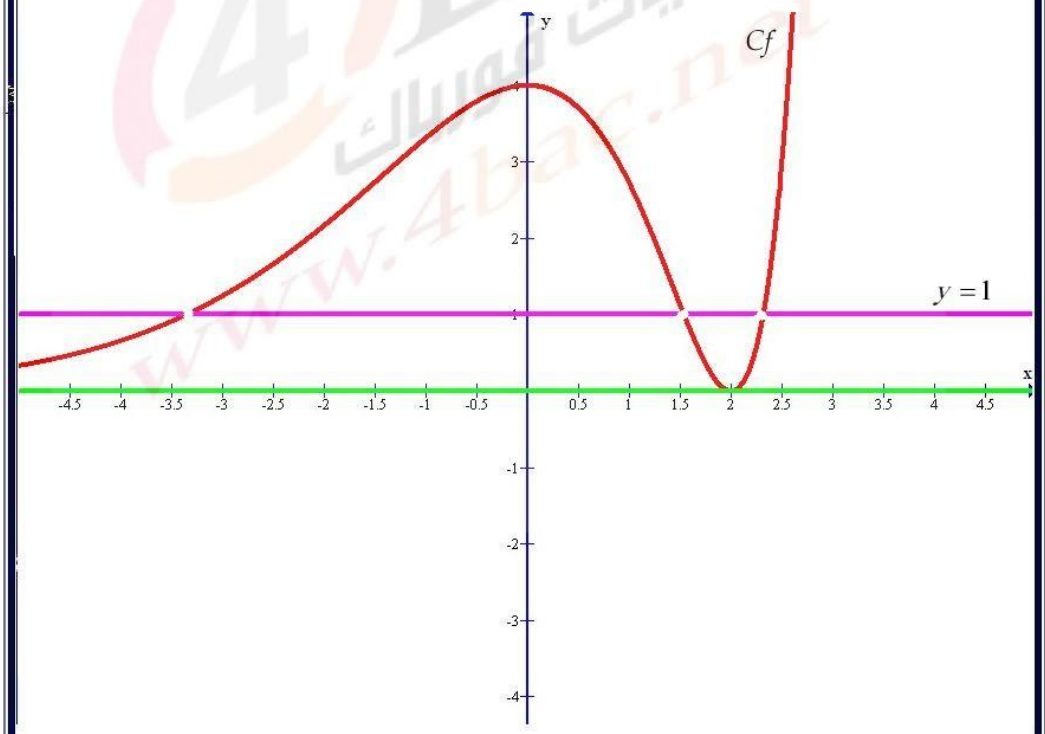
لدينا $x = e^{-x} + 4x - 4$

يعني $x - 4x + 4 = e^{-x}$

يعني $x - 4x + 4x = \frac{1}{e^{x}}$

يعني $(x-2)^2 = \frac{1}{e^{x}}$

يعني $e^{x}.(x-2)^2 = 1$

إذن $f(x) = 1$

إذن في التمثيل المبياني نلاحظ أن المستقيم $y = 1$ و المنحنى Cf يتقاطعان في ثلاث نقط . و منه عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ هي ثلاث حلول مختلفة