

$$I/A \quad L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) \quad \text{et} \quad L_z |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle$$

$$1) \quad L_+ = L_x + iL_y \Rightarrow L_- = L_x - iL_y \text{ et par suite:}$$

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2} \quad \text{et} \quad L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i}$$

$$\langle L_x \rangle = \langle l, m | L_x | l, m \rangle = \frac{1}{2} [\langle l, m | L_+ | l, m \rangle + \langle l, m | L_- | l, m \rangle] \quad \leftarrow (0,25)$$

$$\text{Sachant que } L_{\pm} |l, m\rangle = C_{\pm}(l, m) |l, m \pm 1\rangle \quad \leftarrow (0,5)$$

$$\Rightarrow \bullet \langle L_x \rangle = \frac{1}{2} [C_+(l, m) \langle m, l | l, m+1 \rangle + C_-(l, m) \langle m, l | l, m-1 \rangle] = 0$$

De même:

$$\bullet \langle L_y \rangle = \frac{1}{2i} [C_+(l, m) \langle m, l | l, m+1 \rangle - C_-(l, m) \langle m, l | l, m-1 \rangle] = 0$$

$$\bullet L_x \cdot L_y = \frac{(L_+ + L_-)(L_+ - L_-)}{4i} = \frac{L_+^2 - L_-^2 - [L_+, L_-]}{4i} \quad \leftarrow (0,25)$$

$$\langle L_+^2 \rangle = \langle L_-^2 \rangle = 0; \quad [L_+, L_-] = 2\hbar L_z \quad \leftarrow (0,5)$$

$$\Rightarrow \langle L_x \cdot L_y \rangle = \frac{i}{4} \langle l, m | [L_+, L_-] | l, m \rangle = \frac{i\hbar}{2} \langle l, m | L_z | l, m \rangle = \frac{im\hbar^2}{2} \quad \leftarrow (0,5)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \vec{L} \wedge \vec{L} &= (L_y L_z - L_z L_y) \vec{e}_x + (L_z L_x - L_x L_z) \vec{e}_y + (L_x L_y - L_y L_x) \vec{e}_z \\ &= [L_y, L_z] \vec{e}_x + [L_z, L_x] \vec{e}_y + [L_x, L_y] \vec{e}_z \\ &= i\hbar L_x \vec{e}_x + i\hbar L_y \vec{e}_y + i\hbar L_z \vec{e}_z \\ &= i\hbar \vec{L} \end{aligned} \quad \leftarrow (1)$$

(0,5) Cette écriture n'a pas de sens en physique classique car le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.

(0,5) Cette relation signifie que les composantes L_α ($\alpha = x, y, z$) de \vec{L} ne commutent pas entre elles, ce qui implique que les grandeurs associées ne sont pas compatibles et par suite obéissent aux relations d'incertitude de Heisenberg.

$$B) \psi(\theta, \varphi) = A [3 \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} - 2 \sin^2 \theta e^{2i\varphi}]$$

$$1) \text{ or } \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_2^1(\theta, \varphi) \text{ et } \sin^2 \theta e^{2i\varphi} = \sqrt{\frac{32\pi}{15}} Y_2^2(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow \psi(\theta, \varphi) = -A \left[3 \sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_2^1(\theta, \varphi) + 2 \sqrt{\frac{32\pi}{15}} Y_2^2(\theta, \varphi) \right] \leftarrow (1)$$

$$\text{ou encore } \psi(\theta, \varphi) = -A \sqrt{\frac{8\pi}{15}} [3 Y_2^1(\theta, \varphi) + 4 Y_2^2(\theta, \varphi)]$$

$$2) \text{ Sachant que: } \psi(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | \psi \rangle \text{ et } Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | \ell, m \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \theta, \varphi | \psi \rangle = -A \sqrt{\frac{8\pi}{15}} [3 \langle \theta, \varphi | 2, 1 \rangle + 4 \langle \theta, \varphi | 2, 2 \rangle] \leftarrow (0,5)$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = -A \sqrt{\frac{8\pi}{15}} [3 |2, 1\rangle + 4 |2, 2\rangle] \leftarrow (0,5)$$

$$3) \langle \psi | \psi \rangle = |c|^2 + |c'|^2 = |A|^2 \frac{8\pi}{15} [9 + 16] = |A|^2 \frac{40\pi}{3} = 1$$

$$\text{soit, à un facteur de phase près, } A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \leftarrow (0,5)$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = -\frac{3}{5} |2, 1\rangle - \frac{4}{5} |2, 2\rangle \leftarrow (0,5)$$

$$4) \text{ Sachant que } L^2 | \ell, m \rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) | \ell, m \rangle \text{ et que } L_z | \ell, m \rangle = m \hbar | \ell, m \rangle$$

$$\Rightarrow \text{ici } \ell=2 \Rightarrow L^2 |\psi\rangle = -\frac{3}{5} 6\hbar^2 |2, 1\rangle - \frac{4}{5} 6\hbar^2 |2, 2\rangle$$

$$(0,5) \rightarrow \text{soit } L^2 |\psi\rangle = 6\hbar^2 |\psi\rangle \Rightarrow |\psi\rangle \text{ est } \vec{v}_p \text{ de } L^2 \text{ associée à } 6\hbar^2$$

$$(0,5) \rightarrow \text{Par contre } |\psi\rangle \text{ n'est pas } \vec{v}_p \text{ de } L_z \text{ car } |\psi\rangle \text{ est combinaison linéaire d'états de } m \text{ différentes.}$$

$$5) 2\hbar \text{ est } v_p \text{ de } L_z \text{ associée au ket } |2, 2\rangle \quad (m=2)$$

$$(0,5) \Rightarrow \mathcal{P}_{L_z}(2\hbar) = |\langle 2, 2 | \psi \rangle|^2 = \left| -\frac{4}{5} \right|^2 = \frac{16}{25} \quad (|\psi\rangle \text{ étant normé à l'unité})$$

II / Potentiel Central

$$1) a) H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \Rightarrow \langle r|H|\psi\rangle = E\langle r|\psi\rangle = E\psi(r)$$

$$\text{avec } H = \frac{P^2}{2m} + V(r) \Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r + V(r) \right] \psi(r) = E\psi(r) \quad \leftarrow (0,25)$$

$$\text{sachant que } \Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{L^2}{r^2 \hbar^2} \text{ et } L^2 \psi(r) = \hbar^2 \ell(\ell+1) \psi(r)$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m r^2} + V(r) \right] \psi(r) = E\psi(r) \quad \leftarrow (0,5)$$

b) Le potentiel étant central $\Rightarrow \psi(r) = R(r) \cdot Y(\theta, \varphi)$ où $R(r)$ est la fonction radiale.

L'opérateur $[]$ n'agit que sur $R(r)$, soit en divisant par $Y(\theta, \varphi)$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m r^2} + V(r) - E \right] R(r) = 0 \quad \leftarrow (0,5)$$

2) Avec $V(r) = \frac{A}{r^2} + Br^2$, on aura:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{A}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} Br^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E \right] R(r) = 0$$

$$\text{on pose: } \lambda(\lambda+1) = \ell(\ell+1) + 2mA/\hbar^2; \quad \sigma = \sqrt{2mB}/\hbar$$

$$q = r\sigma \Rightarrow dq = \sigma dr \Rightarrow \frac{d}{dr} = \sigma \frac{d}{dq} \text{ et } \frac{d^2}{dr^2} = \sigma \frac{d^2}{dq^2}; \quad R(r) \rightarrow S(q)$$

$$\Rightarrow \left[\sigma \frac{d^2}{dq^2} + \frac{2\sigma}{q} \frac{d}{dq} - \frac{\lambda(\lambda+1)\sigma}{q^2} - \sigma q^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E \right] S(q) = 0 \quad \leftarrow (1)$$

Soit en divisant par σ et en posant $\varepsilon = \frac{mE}{\hbar^2 \sigma} = \frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2B}}$, on obtient:

$$\left[\frac{d^2}{dq^2} + \frac{2}{q} \frac{d}{dq} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{q^2} - q^2 + 2\varepsilon \right] S(q) = 0 \quad \leftarrow (0,5)$$

3) $\rho = q^2 \rightarrow$ solution: $e^{-\rho/2} \rho^{\lambda/2} \cdot \phi(\rho)$

$$\text{avec } 4\rho \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + 4(\lambda - 1 - \rho) \frac{d\phi}{d\rho} + (2\varepsilon - 2\lambda - 3)\phi = 0$$

$$a) \phi(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k a_k \rho^{k-1} = \frac{d\phi}{d\rho} \text{ et } \sum_{k=0}^{\infty} k a_k \rho^k = \rho \frac{d\phi}{d\rho}$$

$$\text{et } \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) \rho^{k-2} \Rightarrow \rho \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) \rho^{k-1}$$

sachant qu'à l'ordre k : $\frac{d\phi}{dp} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} p^k$ ← 0,5

et $p \frac{d^2\phi}{dp^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)k a_{k+1} p^k$ ← 0,5

on peut alors écrire pour cet ordre :

$$\left[a_{k+1} \{ 4k(k+1) + 4(\lambda-1)(k+1) \} + a_k \{ -4k + 2\varepsilon - 2\lambda - 3 \} \right] p^k$$

$$\Rightarrow \left[a_{k+1} \{ 4(k+1)(k+\lambda-1) \} + a_k \{ 2\varepsilon - (4k + 2\lambda + 3) \} \right] p^k$$

Le coef. de p^k doit être nul, d'où la relation de récurrence :

$$a_{k+1} = \frac{4k + 2\lambda + 3 - 2\varepsilon}{4(k+1)(k+\lambda-1)} a_k$$
 ← 1

b) pour k très grand $\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow \frac{1}{k+1}$ soit $a_k = \frac{1}{k!}$ (car $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} = e^p \Rightarrow \text{solution } \propto e^{-p/2} p^{1/2} e^p$$
 ← 0,25

soit une solution $\propto p^{1/2} e^{p/2} \rightarrow \infty$ qd $p \rightarrow \infty$ ← 0,25

c) Avec une série infinie, on aura une solution qui diverge et donc pas acceptable physiquement, on doit limiter la série c-à-d la réduire à un polynôme pour que la solution reste dominée à l'infini par $e^{-p/2}$ ← 1

4°) $\phi(p)$ est un polynôme de degré p : $\phi(p) = \sum_{k=0}^p a_k p^k$

$\Rightarrow a_{p+1} = 0$ soit d'après la relation de récurrence :

$$4p + 2\lambda + 3 - 2\varepsilon = 0 \Rightarrow 2\varepsilon = 4p + 2\lambda + 3$$
 ← 0,5

on doit que $\lambda(\lambda+1) = p(p+1) + \frac{2m}{\hbar^2} A = D \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - D = 0$ ← 0,5

soit $\lambda_{\pm} = -1 \pm \sqrt{1+4D}$ seul λ_+ est acceptable (car $p \geq 0$ et $A > 0$)

$$\Rightarrow 2\varepsilon = 4p + 2 + \sqrt{1+4D} \Rightarrow \varepsilon = 2p + 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + D}$$
 ← 0,5

avec $\varepsilon = \frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2B}}$ et $\frac{1}{4} + D = \frac{1}{4} + p(p+1) + \frac{2mA}{\hbar^2} = \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2mA}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow E = \hbar \sqrt{\frac{2B}{m}} \left[2p + 1 + \sqrt{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2mA}{\hbar^2}} \right]$$
 ← 0,5

5°) osc. harm. à 3 dimensions :

$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \Rightarrow A=0, B=\frac{1}{2} m \omega^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2B}{m}} = \omega$, on aura : $E = \hbar \omega (2p + p + \frac{3}{2})$

$2p + p$ est entier ≥ 0 que l'impose $= n$ d'où $E = \hbar \omega (n + \frac{3}{2})$; $n=0,1,2,\dots$

1