

**34 ĐỀ THI HỌC
SINH GIỎI TOÁN 11
CẤP TRƯỞNG -
HUYỆN - TỈNH**

NĂM 2017, 2018, 2019, 2020

THÀNH NAM

MỤC LỤC

1. Đề HSG Toán cấp trường lần 1 năm 2019 – 2020 trường Tiên Du 1 – Bắc Ninh
2. Đề thi học sinh giỏi tỉnh Toán 12 THPT năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Đồng Nai
3. Đề thi học sinh giỏi tỉnh Toán 12 THPT năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Hưng Yên
4. Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT môn Toán năm học 2019 – 2020
5. Đề thi HSG tỉnh Toán 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Lâm Đồng
6. Đề chọn học sinh giỏi Toán 12 THPT năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Thái Bình
7. Đề thi HSG Toán 12 THPT cấp tỉnh năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Quảng Bình
8. Đề thi học sinh giỏi tỉnh Toán 12 THPT năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Gia Lai
9. Đề thi học sinh giỏi tỉnh Toán 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Lạng Sơn
10. Đề thi học sinh giỏi tỉnh Toán 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Quảng Ngãi
11. Đề thi chọn HSG cấp tỉnh Toán 12 THPT năm 2019 sở GD&ĐT Quảng Ninh
12. Đề thi chọn học sinh giỏi tỉnh Toán 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Hà Tĩnh
13. Đề thi chọn HSG Toán 12 THPT năm học 2019 – 2020 sở GD&ĐT Vĩnh Phúc
14. Đề chọn đội tuyển dự thi HSG Quốc gia 2020 môn Toán sở GD&ĐT Bắc Ninh
15. Đề chọn học sinh giỏi tỉnh Toán 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Bình Định
16. Đề thi HSG Toán 12 lần 2 năm 2019 – 2020 trường THPT Đồng Đậu – Vĩnh Phúc
17. Đề thi chọn HSG Toán năm 2019 – 2020 trường THPT Ngô Gia Tự – Phú Yên
18. Đề thi học sinh giỏi Toán 12 năm 2019 – 2020 trường Yên Lạc 2 – Vĩnh Phúc
19. Đề thi học sinh giỏi Toán 12 cấp tỉnh năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Yên Bái
20. Đề thi thử HSG lần 1 Toán 12 năm 2019 – 2020 trường Lý Thái Tổ – Bắc Ninh
21. Đề thi học sinh giỏi Toán 12 năm 2019 – 2020 trường Đồng Đậu – Vĩnh Phúc
22. Đề thi HSG Toán 12 THPT chuyên năm học 2019 – 2020 sở GD&ĐT Vĩnh Phúc
23. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Quảng Trị
24. Đề chọn học sinh giỏi MTCT 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Thừa Thiên Huế
25. Đề thi chọn HSG thành phố Toán 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Hà Nội
26. Đề thi chọn HSG tỉnh Toán 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Thừa Thiên Huế
- 27. Toàn cảnh đề thi HSG môn Toán các tỉnh thành năm học 2018 – 2019**
28. Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Toán năm 2020 sở GD&ĐT Cao Bằng
29. Đề chọn HSG thành phố Toán 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Hải Phòng
30. Đề thi chọn HSG Toán 12 năm 2019 – 2020 trường chuyên Lê Quý Đôn – Quảng Trị
31. Đề thi chọn học sinh giỏi tỉnh Toán 12 năm 2019 sở GD&ĐT Bình Phước
32. Đề chọn đội tuyển HSG Toán năm 2020 sở GD&ĐT Khánh Hòa (vòng 1).
33. Đề thi chọn HSG Toán THPT cấp tỉnh năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Ninh Bình
34. Đề chọn đội tuyển HSG Toán 12 năm 2019 – 2020 trường Lê Quý Đôn – Hà Nội
35. Đề chọn đội tuyển thi HSG Quốc gia Toán 12 năm 2019 – 2020 sở GD&ĐT Bến Tre
36. Đề thi chọn HSG tỉnh Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT Quảng Bình
37. Đề thi học sinh giỏi Toán 12 năm học 2018 – 2019 sở GD&ĐT Nam Định
38. Đề thi học sinh giỏi Toán 12 cấp tỉnh năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT Bắc Giang
39. Đề thi học sinh giỏi tỉnh Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT Bắc Ninh
40. Đề thi học sinh giỏi Toán 12 THPT năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT Hà Nam
41. Đề thi học sinh giỏi Toán 12 THPT năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT Cần Thơ
42. Đề thi chọn HSG Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT thành phố Đà Nẵng

43. Đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT Bến Tre
44. Đề thi học sinh giỏi Toán 12 năm 2019 sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh
45. Đề thi HSG Toán 12 cấp trường năm 2018 – 2019 trường Thuận Thành 2 – Bắc Ninh
46. Đề thi HSG Toán 12 năm 2018 – 2019 cụm trường THPT huyện Yên Dũng – Bắc Giang
47. Đề thi chọn HSG Toán 12 chuyên năm học 2018 – 2019 sở GD&ĐT Đồng Nai
48. Đề thi chọn HSG Toán THPT cấp tỉnh năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT Hưng Yên
49. Đề thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh Toán THPT năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT Lào Cai
50. Đề thi chọn HSG Toán 12 THPT năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT Đồng Nai
51. Đề thi chọn HSG cấp tỉnh Toán 12 THPT năm 2018 – 2019 sở GD&ĐT Lâm Đồng
52. Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT 2019 môn Toán (ngày thi thứ nhất)
53. Đề thi chọn HSG Toán cấp tỉnh THPT năm 2018 sở GD và ĐT Quảng Ninh (Bảng B)
54. Đề thi giao lưu HSG Toán năm 2018 – 2019 cụm Gia Bình – Lương Tài – Bắc Ninh
55. Đề thi chọn HSG cấp tỉnh Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Bình Thuận (Vòng 2)
56. Đề thi chọn HSG cấp tỉnh Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Bình Thuận (Vòng 1)
57. Đề thi chọn HSG Toán 12 cấp tỉnh năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Gia Lai
58. Đề thi thử chọn HSG Toán 12 năm 2018 – 2019 cụm Tân Yên – Bắc Giang
59. Đề thi chọn HSG Toán 12 cấp tỉnh năm học 2018 – 2019 sở GD&ĐT Ninh Bình
60. Đề thi chọn HSG Toán 12 cấp cơ sở năm học 2018 – 2019 sở GD và ĐT Điện Biên
61. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 12 THPT năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Thái Bình
62. Đề thi chọn HSG Toán cấp tỉnh THPT năm 2018 sở GD và ĐT Quảng Ninh (Bảng A)
63. Đề thi chọn học sinh giỏi tỉnh Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Hà Tĩnh
64. Đề thi chọn HSG Toán 12 THPT năm học 2018 – 2019 sở GD và ĐT Vĩnh Phúc
65. Đề thi chọn HSG thành phố môn Toán năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Hải Phòng
66. Đề thi chọn HSG cấp tỉnh Toán 12 THPT năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Thừa Thiên Huế
67. Đề thi chọn học sinh giỏi cấp huyện Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Cao Bằng
68. Đề thi KSCL đội tuyển HSG Toán 12 năm 2018 – 2019 trường Yên Lạc 2 – Vĩnh Phúc
69. Đề thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Thái Nguyên
70. Đề thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Quảng Ngãi
71. Đề thi chọn học sinh giỏi tỉnh Toán 12 THPT năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Hải Dương
72. Đề thi chọn HSG Toán cấp tỉnh vòng 2 năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Long An
73. Đề chọn đội tuyển học sinh giỏi Toán năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT TP. HCM
74. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán THPT cấp tỉnh năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Ninh Bình
75. Đề thi chọn đội tuyển dự thi HSG Quốc gia năm 2018 – 2019 môn Toán sở GD và ĐT Hà Tĩnh
76. Đề thi chọn đội tuyển dự kỳ thi HSG Quốc gia Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Phú Thọ
77. Đề chọn đội tuyển dự thi HSG Quốc gia năm 2018 – 2019 môn Toán sở GD và ĐT KonTum
78. Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Toán 12 năm 2018 – 2019 sở GD và ĐT Bến Tre
79. Đề thi chọn đội tuyển tham dự kỳ thi HSG Quốc gia Toán 12 năm 2019 sở GD và ĐT Lạng Sơn
80. Đề Toán chọn đội tuyển học sinh giỏi dự thi Quốc gia 2019 sở GD và ĐT Đồng Tháp
81. Đề chọn đội tuyển dự HSG Quốc gia 2019 môn Toán sở GD và ĐT Quảng Bình
82. Đề thi chọn đội tuyển môn Toán năm 2018 – 2019 trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội
83. Đề thi chọn HSG Toán 12 THPT năm học 2018 – 2019 sở GD và ĐT Hà Nội
84. Đề thi giải toán 12 trên máy tính cầm tay cấp tỉnh năm 2017 – 2018 sở GD&ĐT An Giang

85. Đề thi chọn HSG tỉnh Toán 12 năm 2017 – 2018 sở GD&ĐT Quảng Bình
86. Đề thi chọn HSG tỉnh Toán 12 THPT năm 2017 – 2018 sở GD và ĐT Hà Tĩnh
87. Đề thi HSG Toán 12 năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Quảng Ninh (Bảng A)
88. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 12 năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Nam Định
89. Đề thi chọn HSG THPT năm học 2017 – 2018 môn Toán 12 sở GD và ĐT Hà Nam
90. Đề thi chọn HSG Toán THPT cấp tỉnh năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Hưng Yên
91. Đề thi chọn HSG Toán 12 THPT cấp tỉnh năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Phú Thọ
92. Lời giải và bình luận đề thi VMO 2018
93. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 12 cấp tỉnh THPT năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Hòa Bình
94. Đề thi học sinh giỏi Toán 12 cấp tỉnh năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Ninh Bình
95. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 12 THPT năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Thái Bình
96. Đề thi chọn HSG cấp tỉnh Toán 12 năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Bình Phước
97. Đề thi chọn HSG Toán 12 THPT năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Vĩnh Phúc
98. Đề thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh môn Toán 12 THPT học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Thừa Thiên Huế
99. Đề thi thử HSG Toán 12 THPT năm học 2017 – 2018 trường THPT Bình Xuyên – Vĩnh Phúc
100. Đề thi chọn học sinh giỏi vòng trường môn Toán trường THPT Chu Văn An – Gia Lai
101. Đề thi chọn HSG tỉnh Toán 12 năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Hải Dương
102. Đề thi chọn đội tuyển tham dự kỳ thi chọn HSG Quốc gia 2018 sở GD và ĐT Quảng Ngãi
(Ngày 2)
103. Đề thi chọn đội tuyển tham dự kỳ thi chọn HSG Quốc gia 2018 sở GD và ĐT Quảng Ngãi
(Ngày 1)
104. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 12 cấp trường năm 2017 – 2018 trường Lý Thái Tổ – Bắc Ninh
105. Đề thi chọn HSG Toán 12 năm học 2017 – 2018 trường THPT Lê Quý Đôn – Thái Bình
106. Đề thi chọn đội tuyển dự thi HSG Quốc gia THPT 2018 môn Toán sở GD và ĐT Bắc Ninh
107. Đề thi chọn đội dự tuyển thi HSG Quốc gia THPT 2018 môn Toán sở GD và ĐT Đồng Nai
108. Đề thi chọn HSG thành phố Toán 12 năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Hải Phòng
(Không chuyên)
109. Đề thi chọn HSG lớp 12 cấp trường năm học 2017 – 2018 môn Toán trường Trần Hưng Đạo – Vĩnh Phúc
110. Đề thi chọn HSG cấp huyện lớp 12 THPT năm học 2017 – 2018 môn Toán sở GD và ĐT Cao Bằng
111. Đề minh họa kỳ thi chọn HSG Toán 12 THPT cấp tỉnh năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Phú Thọ
112. Đề thi học sinh giỏi môn Toán 12 năm học 2017 – 2018 trường THPT Đan Phượng – Hà Nội
113. Đề thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh Toán 12 năm học 2017 – 2018 sở GD và ĐT Thái Nguyên
114. Đề thi chọn HSG cấp tỉnh lớp 12 THPT năm học 2017 – 2018 môn Toán sở GD và ĐT Hải Dương

- 115. Đề thi thành lập đội tuyển HSG Toán 12 dự thi Quốc gia năm học 2016 – 2017 sở GD và ĐT Bình Thuận
- 116. Đề thi chọn HSG Toán 12 cấp tỉnh năm học 2016 – 2017 sở GD và ĐT Bình Thuận
- 117. Đề thi chọn HSG văn hóa cấp cụm môn Toán 12 năm học 2016 – 2017 cụm THPT Lạng Giang – Bắc Giang
- 118. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 12 năm học 2016 – 2017 sở GD và ĐT Vĩnh Phúc
- 119. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 12 năm 2016 sở GD và ĐT Quảng Ninh
- 120. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 12 năm học 2016 – 2017 sở GD và ĐT Ninh Bình

Câu 1.(2,0 điểm).

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2019$.

Câu 2.(2,0 điểm).

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $(m-1)\sin x - 3\cos x = m+2$ có nghiệm.
(m là tham số).

Câu 3.(4,0 điểm).

a) Giải phương trình $3\cos 2x + 2\cos x - 5 = 0$

b) Tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

Câu 4 .(2,0 điểm).

Cho tập $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Từ các chữ số lấy trong tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau ?

Câu 5. (3,0 điểm).

a) Trong một chiếc hộp đồ chơi có 25 quả bóng nhỏ được đánh số từ 1 đến 25. Một em bé khi chơi đã lấy ngẫu nhiên ra 2 quả. Tính xác suất để em bé đó chọn được 2 quả có tổng số ghi trên 2 quả đó là một số lẻ ?

b) Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là 0,6. Vận động viên đó bắn hai viên một cách độc lập. Tính xác suất để vận động viên đó bắn trúng mục tiêu đúng một viên?

Câu 6. (2,0 điểm).

Với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^{10}$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$?

Câu 7.(4,0 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(3;5)$ và đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$

a) Tìm ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2;1)$

b) Tìm phương trình đường (C') sao cho (C) là ảnh của (C') qua phép vị tự tâm O với tỷ số vị tự bằng -2 ?

Câu 8.(1,0 điểm).

Cho hình vuông $ABCD$ (theo chiều dương) . Điểm I là tâm của hình vuông . Gọi H là trung điểm AD , K là trung điểm AH , L là trung điểm AI . Tìm ảnh của hình thang $IHKL$ qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm I góc quay -90° và phép vị tự tâm D với tỷ số bằng 2.

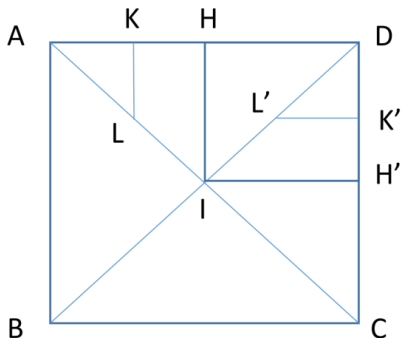
-----HẾT-----

Họ và tên.....SBD.....

ĐÁP ÁN-THANG ĐIỂM CHẤM

CÂU	NỘI DUNG CHẤM	THANG ĐIỂM
Câu 1. (2,0 điểm).	Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2019$.	
	$\forall x \in R$ $-\sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} \leq \sqrt{3} \sin x - \cos x \leq \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow -2 \leq \sqrt{3} \sin x - \cos x \leq 2$	0,75
	$\Leftrightarrow 2017 \leq \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2019 \leq 2021$	0,75
	$\max y = 2021$ khi $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$	0,5
Câu 2. (2,0 điểm).	Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $(m-1)\sin x - 3\cos x = m+2$ có nghiệm. (m là tham số).	
	Phương trình có nghiệm khi $(m-1)^2 + (-3)^2 \geq (m+2)^2$	0,5
	$\Leftrightarrow -6m \geq -6$	0,75
	$\Leftrightarrow m \leq 1$	0,75
Câu 3. (4,0 điểm).	a) Giải phương trình $3\cos 2x + 2\cos x - 5 = 0$	
	$3\cos 2x + 2\cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow 6\cos^2 x + 2\cos x - 8 = 0$	0,75
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{4}{3} (VN) \end{cases}$	0,75
	$\cos x = 1 \Rightarrow x = k2\pi, k \in Z$	0,5
	b) Tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$	
	Đk: $x \geq \frac{1}{2}$	0,25
	$\sqrt{2x-1} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = 0 \\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$	0,25
	$\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$	0,5
	$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$	0,5
	Với x thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ tìm được $k = \{0, 1, 2, 3\}$ tương ứng các nghiệm $x = \left\{-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}\right\}$	0,25
Câu 4. (2,0 điểm).	Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Từ các chữ số lấy trong tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt?	
	Số cần tìm có dạng $a_1 a_2 a_3 a_4$	0,25
	$a_1 \neq 0$ Có 8 lựa chọn	0,25
	a_2 có 8 lựa chọn	0,25
	a_3 có 7 lựa chọn	0,25
	a_4 có 6 lựa chọn	0,25
	Theo quy tắc nhân có $8.8.7.6 = 2688$ số	0,75

Câu 5. (3,0 điểm).	a) Trong một chiếc hộp đồ chơi có 25 quả bóng nhỏ được đánh số từ 1 đến 25. Một em bé khi chơi đã lấy ngẫu nhiên ra 2 quả. Tính xác suất để em bé đó chọn được 2 quả có tổng số ghi trên 2 quả đó là một số lẻ ?	
	$n(\Omega) = C_{25}^2 = 300$	0,5
	A “2 quả có tổng số ghi trên 2 quả đó là một số lẻ”, $n(A) = C_{12}^1 \cdot C_{13}^1 = 156$	0,5
	$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{156}{300} = \frac{13}{25}$	1,0
	b) Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là 0,6. Vận động viên đó bắn hai viên một cách độc lập. Tính xác suất để vận động viên đó bắn trúng mục tiêu đúng một viên?	
Câu 6. (2,0 điểm).	Ký hiệu A_1 là biến cố viên thứ nhất bắn trúng, $P(A_1) = 0,6; P(\overline{A_1}) = 0,4$ A_2 là biến cố viên thứ hai bắn trúng, $P(A_2) = 0,6; P(\overline{A_2}) = 0,4$	0,5
	A: “Vận động viên đó bắn trúng đúng một viên” $P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48$	0,5
	Với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^{10}$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$?	
	Ta có $2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^{10} \Rightarrow n = 10$	0,5
	Xét số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_{10}^k (x^3)^{10-k} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C_{10}^k 2^k \cdot x^{30-5k}$	0,5
Câu 7. (4,0 điểm)	Khai triển không chứa $x \Leftrightarrow 30 - 5k = 0 \Rightarrow k = 6$	0,5
	$\Rightarrow T_7 = C_{10}^6 2^6$	0,5
	Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(3;5) và đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$	
	a) Tìm ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2;1)$	
	$T_{\vec{v}}(A) = A'(x'; y') \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v} (*)$	0,75
	$\overrightarrow{AA'} = (x-3; y-5)$	0,5
	$(*) \Rightarrow \begin{cases} x-3 = -2 \\ y-5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow A'(1;6)$	0,75
	b) Tìm phương trình đường (C') sao cho (C) là ảnh của (C') qua phép vị tự tâm O với tỷ số vị tự bằng -2?	
Câu 7. (4,0 điểm)	G/S $M(x; y) \in (C), M'(x'; y') \in (C')$	
	Theo giả thiết $V_{(O;-2)}(C') = (C) \Leftrightarrow V_{(O;-2)}(M') = M \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -2\overrightarrow{OM'}$	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} x = -2x' \\ y = -2y' \end{cases}$; thay vào phương trình đường tròn (C)	0,5
	$\Rightarrow (-2x'-3)^2 + (-2y'+4)^2 = 9$	0,5

	$\Rightarrow \left(x' + \frac{3}{2}\right)^2 + (y' - 2)^2 = \frac{9}{4}$	0,5
Câu 8. (1,0điểm).	<p>Cho hình vuông ABCD (theo chiều dương) . Điểm I là tâm của hình vuông . Gọi H là trung điểm AD, K là trung điểm AH, L là trung điểm AI. Tìm ảnh của hình thang IHKL qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm I góc quay - 90^0 và phép vị tự tâm D với tỷ số bằng 2.</p>	
		
	<p>H' là trung điểm của DC, K' là trung điểm của DH', L' là trung điểm của ID</p> <p>$Q_{(O; -90^0)}(IHKL) = IH'K'L'$</p>	0,5
	<p>$V_{(D; 2)}(IH'K'L') = BCH'I$</p>	0,5
	<p>Vậy, ảnh của hình thang IHKL qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm I góc quay - 90^0 và phép vị tự tâm D với tỷ số bằng 2 là hình thang BCH'I.</p>	

Số báo danh

.....

Môn thi: TOÁN - Lớp 11 THPT

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi có 01 trang - gồm 05 câu

Câu I (4,0 điểm)

1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - (m+2)x + m + 1$, biết rằng (P) đi qua điểm $M(3;0)$.
2. Giải phương trình: $\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x} = x$.

Câu II (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\cos 2x + \sqrt{3}(1 + \sin x) = \frac{2\cos x + 2\sin 2x - 2\sin x - 1}{2\cos x - 1}$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y+3)\sqrt{x+3} = \sqrt{y+1} \\ (x-y+3)\sqrt{x} + \sqrt{y-2x+1} - x^2 + y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III (4,0 điểm)

1. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca+a^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính Xác suất để số được chọn không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

Câu IV (4,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại $A(-1;3)$. Gọi D là một điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AD$ và H là hình chiếu vuông góc của B trên CD . Điểm $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm đoạn HC .

Xác định tọa độ điểm C , biết điểm B nằm trên đường thẳng $x + y + 7 = 0$.

2. Trong mặt phẳng với trục tọa độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$). Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên các đường thẳng AC, CD . Giả sử M, N lần lượt là trung điểm của AD, HI . Viết phương trình đường thẳng AB biết $M(1;-2), N(3;4)$ và đỉnh B nằm trên đường thẳng $x + y - 9 = 0$, $\cos \widehat{ABM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu V (4,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'S}$.

Mặt phẳng (α) qua A' cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Tính giá trị của biểu thức

$$T = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} - \frac{SC}{SC'}.$$

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, đáy lớn $BC = 2a$, $AD = a$, $AB = b$. Mặt bên (SAD) là tam giác đều. Mặt phẳng (α) qua điểm M trên cạnh AB và song song với các cạnh SA, BC . (α) cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q . Đặt $x = AM$ ($0 < x < b$). Tính giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

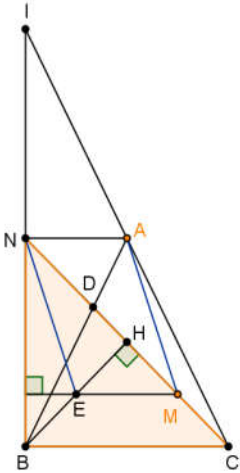
..... HẾT

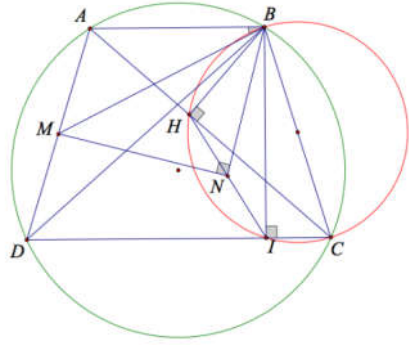
ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM

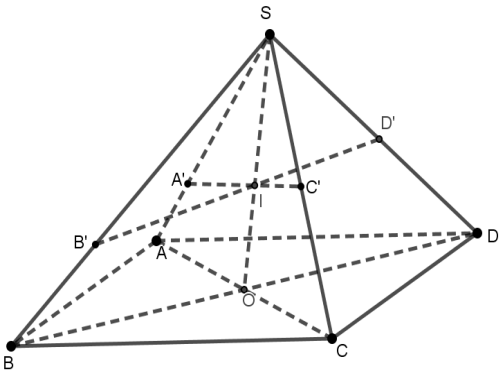
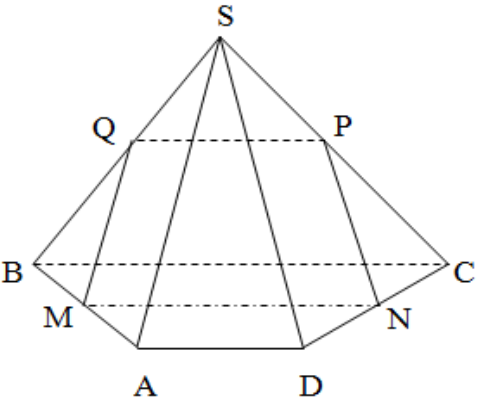
Câu	NỘI DUNG	Điểm
I	1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - (m+2)x + m + 1$, biết rằng (P) đi qua điểm $M(3;0)$.	2.0
4,0 điểm	Do (P) đi qua điểm $M(3;0)$ nên ta có $9 - 3(m+2) + m + 1 = 0 \Leftrightarrow -2m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$	0.50
	Khi đó ta có hàm số $y = x^2 - 4x + 3$	
	Ta có đỉnh $I: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow I(2; -1)$	0.50
	Bảng biến thiên	
		0.50
		0.50
	2. Giải phương trình sau $\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x} = x$.	2.0
	Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Phương trình đã cho tương đương với: $2x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 1) - (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 0$	0.50
	Đặt $a = \sqrt{1+x}$; $b = \sqrt{1-x}$, ($a, b \geq 0$) $\Rightarrow 2x = a^2 - b^2$. Phương trình đã cho trở thành: $(a^2 - b^2)(a+b-1) - (a+b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)[(a+b)(a+b-1) - 1] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ (a+b)^2 - (a+b) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a+b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$	0.50
	+ Với: $a = b \Rightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x = 0$	0.50
	+ Với: $a+b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ - Kết luận. Phương trình có các nghiệm $x = 0$; $x = \pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.	0.50

II	1. Giải phương trình: $\cos 2x + \sqrt{3}(1 + \sin x) = \frac{2 \cos x + 2 \sin 2x - 2 \sin x - 1}{2 \cos x - 1}$	2.0
4,0 điểm	Điều kiện: $2 \cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. $Pt \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}(1 + \sin x) = \frac{(2 \cos x - 1) + 2 \sin x(2 \cos x - 1)}{2 \cos x - 1}$	0.50
	$\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}(1 + \sin x) = \frac{(2 \cos x - 1)(1 + 2 \sin x)}{2 \cos x - 1}$ $\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x + \sqrt{3} + \sqrt{3} \sin x = 1 + 2 \sin x$ $\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $\sin x = -1$.	0.50
	Với $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ Với $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$	0.50
	So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.	0.50
	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x - y + 3)\sqrt{x + 3} = \sqrt{y + 1} \\ (x - y + 3)\sqrt{x} + \sqrt{y - 2x + 1} - x^2 + y = 0 \end{cases}$	2.0
	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y + 1 \geq 0 \\ y - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$. Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình : $(x - y + 3)\sqrt{x + 3} = \sqrt{y + 1} \Leftrightarrow (x - y + 2)\sqrt{x + 3} = \sqrt{y + 1} - \sqrt{x + 3}$	0.50
	$\Leftrightarrow (x - y + 2)\sqrt{x + 3} = \frac{y - x - 2}{\sqrt{y + 1} + \sqrt{x + 3}} \Leftrightarrow (x - y + 2) \left(\sqrt{x + 3} + \frac{1}{\sqrt{y + 1} + \sqrt{x + 3}} \right) = 0 \quad (1)$ Với điều kiện $x \geq 0, y \geq -1$ ta có : $\sqrt{x + 3} + \frac{1}{\sqrt{y + 1} + \sqrt{x + 3}} > 0$. Nên từ (1) ta có : $x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$.	0.50
	Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{3 - x} = x^2 - x - 2 \quad (*)$ Điều kiện $0 \leq x \leq 3$. Vì $VT \geq 0 \Rightarrow VP \geq 0 \Rightarrow x \in [2; 3]$. Với mọi $x \in [2; 3]$ ta có: $(1) \Leftrightarrow (x - 1) - \sqrt{x} + (x - 2) - \sqrt{3 - x} + x^2 - 3x + 1 = 0$	0.50
	$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1}{(x - 1) + \sqrt{x}} + \frac{x^2 - 3x + 1}{(x - 2) + \sqrt{3 - x}} + x^2 - 3x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1) \left(\frac{1}{(x - 1) + \sqrt{x}} + \frac{1}{(x - 2) + \sqrt{3 - x}} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow y = \frac{7 + \sqrt{5}}{2}$ (tmdk). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \right)$.	0.50

III	1. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{ca+a^2}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$	2.0									
4,0 điểm	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{2b.(a+b)}\leq\frac{2b+(a+b)}{2}=\frac{a+3b}{2}$ Áp dụng tương tự ta được $\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{ca+a^2}}\geq\frac{2a\sqrt{2}}{a+3b}+\frac{2b\sqrt{2}}{b+3c}+\frac{2c\sqrt{2}}{c+3a}.$	0.50									
	Ta cần chứng minh $\frac{2a\sqrt{2}}{a+3b}+\frac{2b\sqrt{2}}{b+3c}+\frac{2c\sqrt{2}}{c+3a}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$ Hay $\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\geq\frac{3}{4}.$ Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được $\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}.$	0.50									
	Mặt khác, từ một đánh giá quen thuộc ta có $(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)$ Do đó ta được $a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{4}{3}(a+b+c)^2$	0.50									
	Từ đó suy ra $\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{3}(a+b+c)^2}=\frac{3}{4}$ Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.	0.50									
	2. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính Xác suất để số được chọn không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau.	2.0									
	Số phần tử của S là $8.A_8^5=53760$. Do đó, chọn ngẫu nhiên một số từ tập S có 53760 (cách). Vì số được chọn có 6 chữ số nên ít nhất phải có hai chữ số chẵn, và vì không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau nên số được chọn có tối đa 3 chữ số chẵn.	0.50									
	TH1: Số được chọn có đúng 2 chữ số chẵn, khi đó gọi số cần tìm là \overline{abcdef} Xếp 4 số lẻ trước ta có 4! cách. <table><tr><td></td><td>lẻ</td><td></td><td>lẻ</td><td></td><td>lẻ</td><td></td><td>lẻ</td><td></td></tr></table> Xếp 2 số chẵn vào 5 khe trống của các số lẻ có $C_5^2.A_5^2-4.C_4^1$ cách. Trong trường hợp này có $4!(C_5^2.A_5^2-4.C_4^1)=4416$ (số).		lẻ		lẻ		lẻ		lẻ		0.50
	lẻ		lẻ		lẻ		lẻ				

	<p>TH2: Số được chọn có đúng 3 chữ số chẵn, khi đó gọi số cần tìm là \overline{abcdef} Xếp 3 chữ số lẻ trước ta có A_4^3 cách.</p> <div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 10px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block; background-color: #f9cb9c; text-align: center;">lẻ</div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block; background-color: #f9cb9c; text-align: center;">lẻ</div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block; background-color: #f9cb9c; text-align: center;">lẻ</div> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div> </div> <p>Xếp 3 chữ số chẵn vào 4 khe trống của các số lẻ có $C_4^3 \cdot A_5^3 - C_3^2 \cdot A_4^2$ cách. Trong trường hợp này có $A_4^3 \cdot (C_4^3 \cdot A_5^3 - C_3^2 \cdot A_4^2) = 4896$ (số).</p> <p>Vậy có tất cả 9312 số có 6 chữ số sao cho không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau.</p> <p>Xác suất cần tìm là $\frac{9312}{53760} = \frac{97}{560}$.</p>	<p>0.50</p> <p>0.50</p>
<p>IV</p>	<p>1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại $A(-1;3)$. Gọi D là một điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AD$ và H là hình chiếu vuông góc của B trên CD. Điểm $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm đoạn HC. Xác định tọa độ điểm C, biết điểm B nằm trên đường thẳng $x + y + 7 = 0$.</p>	<p>2.0</p>
<p>4,0 điểm</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>Gọi N, I là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với BC với các đường thẳng CD và CA.</p> <p>Do tam giác IBC vuông tại B và $AB = AC \Rightarrow A$ là trung điểm của đoạn IC, suy ra D là trọng tâm tam giác IBC. Do đó $AN // \frac{1}{2} BC$.</p> <p>Gọi E là trung điểm BH, khi đó E là trực tâm tam giác NBM và tứ giác $NAME$ là hình bình hành nên từ $NE \perp BM \Rightarrow AM \perp BM$.</p> </div> <div style="width: 45%; text-align: center;">  </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 20px;"> <div style="width: 45%;"> <p>Đường thẳng BM có phương trình $x - 3y = 5$. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ</p> $\begin{cases} x + y = -7 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(-4; -3)$ </div> <div style="width: 45%; text-align: center;"> <p>0.50</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 20px;"> <div style="width: 45%;"> <p>Từ $\overline{AB} = 3\overline{AD} \Rightarrow D(-2; 1)$. Lúc đó ta có phương trình các đường thẳng $CD: x + y = -1$; $BH: x - y = -1$. Suy ra tọa độ điểm $H(-1; 0)$. Suy ra $C(2; -3)$</p> </div> <div style="width: 45%; text-align: center;"> <p>0.50</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 20px;"> <div style="width: 45%;"> <p>2. Trong mặt phẳng với trục tọa độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$). Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên các đường thẳng AC, CD. Giả sử M, N lần lượt là trung điểm của AD, HI. Viết phương trình đường thẳng AB biết $M(1; -2)$, $N(3; 4)$ và đỉnh B nằm trên đường thẳng $x + y - 9 = 0$, $\cos \widehat{ABM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.</p> </div> <div style="width: 45%; text-align: center;"> <p>2.0</p> </div> </div>	<p>1.0</p> <p>0.50</p> <p>0.50</p> <p>2.0</p>

	<p>Xét tam giác ABD và HBI có:</p> $\widehat{ABD} = \widehat{HBI} = \widehat{HBI}.$ <p>Và $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{HIB}$. Suy ra $\triangle ABD \sim \triangle HBI$</p> <p>Ta có BM, BN lần lượt là hai trung tuyến của tam giác ABD, HBI do đó:</p> $\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BH} \quad (1).$ <p>Lại có</p> $\widehat{ABM} = \widehat{HBN} \Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{ABH} \quad (2).$ <p>Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABH \sim \triangle MBN$.</p> <p>Do đó $\widehat{MNB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ hay $MN \perp NB$</p>	 <p>0.50</p>
	<p>Đường thẳng BN đi qua N và vuông góc với MN nên có phương trình là: $x + 3y - 15 = 0$.</p> <p>Toạ độ điểm B thỏa mãn $\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ x + 3y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$. Suy ra $B(6; 3)$.</p>	0.50
	<p>Gọi $\vec{n}(a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng AB.</p> <p>Ta có $\overrightarrow{MB}(5; 5)$ cùng phương với vec tơ $\overrightarrow{u_{MB}}(1; 1)$. Theo bài ra ta có:</p> $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{ a + b }{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \Leftrightarrow 8(a^2 + b^2) = 5(a^2 + 2ab + b^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ 3a = b \end{cases}$	0.50
	<p>Với $a = 3b$, chọn $b = 1 \Rightarrow a = 3$ ta có phương trình $3x + y - 21 = 0$</p> <p>Với $b = 3a$ chọn $a = 1 \Rightarrow b = 3$ ta có phương trình $x + 3y - 15 = 0$ (loại do trùng với BN)</p> <p>Vậy phương trình đường thẳng AB là: $3x + y - 21 = 0$.</p>	0.50
V	<p>1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'S}$. Mặt phẳng (α) qua A' cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} - \frac{SC}{SC'}$.</p>	2.0
4,0 điểm	<p>Gọi O là giao của AC và BD. Ta có O là trung điểm của đoạn thẳng AC, BD. Các đoạn thẳng $SO, A'C', B'D'$ đồng quy tại I.</p>	

<p>Ta có:</p> $S_{SA'I} + S_{SC'I} = S_{SA'C'}$ $\Leftrightarrow \frac{S_{SA'I}}{S_{SAC}} + \frac{S_{SC'I}}{S_{SAC}} = \frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}}$ $\Leftrightarrow \frac{S_{SA'I}}{2S_{SAO}} + \frac{S_{SC'I}}{2S_{SCO}} = \frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}}$ 	0.50
$\Leftrightarrow \frac{SA'}{2SA} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{SC'}{2SC} \cdot \frac{SI}{SO} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow \frac{SI}{2SO} \left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} \right) = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC}$	0.50
$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}; \text{ Tương tự: } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}$	0.50
<p>Suy ra: $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} - \frac{SC}{SC'} = \frac{SA}{SA'} = \frac{3}{2}$.</p>	0.50
<p>2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, đáy lớn $BC = 2a$, $AD = a$, $AB = b$. Mặt bên (SAD) là tam giác đều. Mặt phẳng (α) qua điểm M trên cạnh AB và song song với các cạnh SA, BC. (α) cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Đặt $x = AM$ ($0 < x < b$). Tính giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.</p>	2.0
<p>$(\alpha) \parallel SA$ và BC nên $(\alpha) \parallel (SAD) \Rightarrow MQ \parallel SA, NP \parallel SD$ Ta có $MN \parallel PQ \parallel AD \parallel BC$</p> <p>Theo ĐL Talét trong hình thang $ABCD: \frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CD} \quad (1)$</p> <p>Theo ĐL Talét trong $\triangle SAB: \frac{BM}{BA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{MQ}{SA} \quad (2)$</p> <p>Theo ĐL Talét trong $\triangle SCD: \frac{CN}{CD} = \frac{CP}{CS} = \frac{PN}{SD} \quad (3)$</p>  <p style="text-align: center;">Hình 2</p>	0.50
<p>Từ (1), (2), (3) suy ra $MQ = NP = \frac{b-x}{b}a$; $PQ = \frac{x}{b}2a$; $MN = a + \frac{x}{b}a$</p> <p>\Rightarrow Thiết diện là hình thang cân và $S_{td} = \frac{1}{2}(MN + PQ) \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2} \right)^2}$</p>	0.50
$= \frac{1}{2} \left(\frac{ab+ax}{b} + \frac{2ax}{b} \right) \sqrt{\frac{a^2(b-x)^2}{b^2} - \frac{a^2(b-x)^2}{4b^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(b+3x)}{b} \cdot \frac{a\sqrt{3}(b-x)}{2b}$	0.50

	$= \frac{a^2\sqrt{3}}{12b^2}(3x+b)(3b-3x) \leq \frac{a^2\sqrt{3}}{12b^2} \left(\frac{3x+b+3b-3x}{2} \right)^2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	
	Vậy diện tích lớn nhất của thiết diện là $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ khi $x = \frac{b}{3}$.	0.50

..... **HẾT**

Họ và tên:.....Lớp:.....

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (14,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = -\frac{mx^3}{3} + \frac{mx^2}{2} - (3-m)x + 2$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để $f'(x) < 0$ với mọi x .

- A. $\left(0; \frac{12}{5}\right)$. B. $\left(0; \frac{12}{5}\right]$. C. $\left[0; \frac{12}{5}\right)$. D. $\left[0; \frac{12}{5}\right]$.

Câu 2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được các số có bốn chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số đó có chữ số 4.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P thứ tự là trung điểm của AC, CB, BD . Gọi d là giao tuyến của (MNP) và (ABD) . Kết luận nào đúng?

- A. $d // AC$. B. $d \subset (ABC)$. C. $d // BC$. D. $d // (ABC)$.

Câu 4. Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên \mathbb{R} .

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

Câu 5. Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa mãn $3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 \geq 0$?

- A. 2. B. 0. C. 7. D. 5.

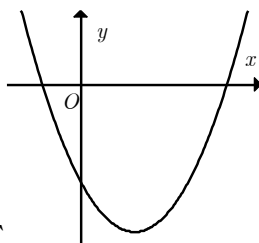
Câu 6. Trên đoạn $[-2018; 2018]$ phương trình $\sin x (2\cos x - \sqrt{3}) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 3856. B. 1286. C. 2571. D. 1928.

Câu 7. Trong tập giá trị của hàm số $y = \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 8. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a < 0, b < 0, c < 0$.
C. $a > 0, b < 0, c > 0$. D. $a > 0, b > 0, c > 0$.

Câu 9. Xét hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số đồng biến và trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số nghịch biến.

- B. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số luôn đồng biến.
- C. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số luôn nghịch biến.
- D. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số nghịch biến và trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số đồng biến.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục tung tại $A(0; -1)$, tiếp tuyến tại A có hệ số góc $k = -3$.

Các giá trị của a, b là:

- A. $a = 2, b = 1$. B. $a = 1, b = 2$. C. $a = 1, b = 1$. D. $a = 2, b = 2$.

Câu 11. Số đường thẳng đi qua điểm $M(5; 6)$ và tiếp xúc với đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trên.

- A. $u_1 = -9; q = -2$. B. $u_1 = 9; q = -2$.
C. $u_1 = 9; q = 2$. D. $u_1 = -9; q = 2$.

Câu 13. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}}{5 + (-4)^{n+1}}$ là

- A. $-\frac{1}{4}$. B. $-\infty$. C. 4. D. 0.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng từ điểm B đến mặt phẳng $(AB'C)$.

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, có M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Vector $\overrightarrow{A'M}$ được biểu thị qua các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}$ như sau

- A. $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}$. B. $\overrightarrow{A'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.
C. $\overrightarrow{A'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}$. D. $\overrightarrow{A'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$.

Câu 16. Cho bốn điểm không đồng phẳng, ta có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ bốn điểm đã cho?

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 17. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60° . Cạnh bên của hình lăng trụ bằng:

- A. $a\sqrt{3}$. B. $2a$. C. $a\sqrt{2}$. D. $3a$.

Câu 18. Tìm giới hạn sau $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{1 - \sqrt{2-x^2}}$

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. 2. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng AC và BA' là:

A. 45^0 .

B. 60^0 .

C. 30^0 .

D. 120^0 .

Câu 20. Hàm số $y = \sqrt{\frac{\cos x - 1}{4 + \cos x}}$ có tập xác định D là:

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \emptyset$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 21. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.

B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.

D. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

Câu 22. Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$?

A. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

C. $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

D. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

Câu 23. Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu là

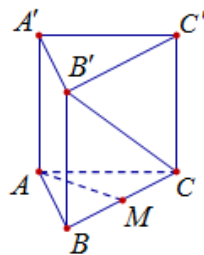
A. $\frac{1}{12}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{36}$.

D. $\frac{5}{18}$.

Câu 24. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a (tham khảo hình bên). Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ là



A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. a .

Câu 25. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-5)x^2 + 2(m-1)x + m = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$?

A. $m \geq 5$.

B. $m < \frac{8}{3}$.

C. $\frac{8}{3} \leq m \leq 5$.

D. $\frac{8}{3} < m < 5$.

Câu 26. Cho tam giác ABC có $A(0;1)$ trọng tâm $G(1;-1)$ đường cao $AH: 2x + y - 2 = 0$ khi đó đường thẳng BC có phương trình:

A. $-2x + y - 3 = 0$.

B. $x - 2y - 2 = 0$.

C. $2x - 4y - 11 = 0$.

D. $x - 2y - 4 = 0$.

Câu 27. Với giá trị nào của m thì phương trình $3\sin^2 x + 2\cos^2 x = m + 2$ có nghiệm?

A. $m > 0$.

B. $m < 0$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $-1 \leq m \leq 0$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2018)$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 2018!$.

B. $f'(0) = -2018!$.

C. $f'(0) = 0$.

D. $f'(0) = 2018$.

Câu 29. Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Câu 30. Cho khai triển $(3x+2)^{15} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$. Hệ số lớn nhất trong khai triển đó là

- A. a_{15} . B. a_{12} C. a_9 . D. a_8 .

Câu 31. Gieo hai con súc sắc. Xác suất để tổng hai mặt là một số chia hết cho 3 là.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{11}{36}$. C. $\frac{13}{36}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ ax + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (a là tham số). Khi hàm số liên tục tại điểm $x = 1$ thì giá trị của a bằng:

- A. 0. B. 3. C. -1. D. 1

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 34. Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- A. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. B. $3a^2$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-3a^2$.

Câu 35. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, ($t > 0$), t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $t = 3s$. B. $t = 1s$. C. $t = 2s$. D. $t = 6s$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{x^2}{1-x}$. Tính $y^{(100)}(0)$.

- A. $y^{(100)}(0) = 100!$. B. $y^{(100)}(0) = 99!$. C. $y^{(100)}(0) = -100!$. D. $y^{(100)}(0) = -99!$.

Câu 37. Xác định a để hai đường thẳng $d_1: ax + 3y + 4 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

- A. $a = 1$ B. $a = -1$ C. $a = -2$ D. $a = 2$

Câu 38. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau. Tính tổng tất cả các số đó?

- A. 120. B. 42000. C. 2331. D. 46620.

Câu 39. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 4. Điểm M là trung điểm của đoạn BC , điểm E nằm trên đoạn BM , E không trùng với B và M . Mặt phẳng (P) qua E và song song với mặt phẳng (AMD) . Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Độ dài đoạn BE bằng

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{4}{3}$. C. 1. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 40. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) . Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là:

- A. Hình thang vuông. B. Hình bình hành.
C. Tam giác cân. D. Hình thang cân.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh SC lấy điểm M sao cho $MC = 2MS$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 42. Biết rằng phương trình $x^5 + x^3 + 3x - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm x_0 , mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x_0 \in (1; 2)$. B. $x_0 \in (0; 1)$. C. $x_0 \in (-1; 0)$. D. $x_0 \in (-2; -1)$.

Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD sao cho thiết diện đó là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng:

A. $\frac{24}{7}$. B. $\frac{18}{7}$. C. $\frac{31}{7}$. D. $\frac{15}{7}$.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Chọn kết quả đúng ?

A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$. B. $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.
C. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$. D. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

Câu 45. Cho hàm số: $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C). Số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ là:

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 46. Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases}$. Số hạng đầu và công sai lần lượt là

A. $u_1 = 3; d = 1$ B. $u_1 = 3; d = 2$ C. $u_1 = 2; d = -3$ D. $u_1 = 1; d = 3$

Câu 47. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x+3}{x-2}$ bằng

A. 13. B. $+\infty$. C. 5. D. $-\infty$.

Câu 48. Bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 4} \geq x + 3$ có nghiệm

A. $x < -3$. B. $x \leq -\frac{13}{6}$. C. $-3 < x \leq 2$. D. $-3 \leq x \leq -\frac{13}{6}$.

Câu 49. Biết các số C_n^1, C_n^2, C_n^3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n .

A. $n = 5$. B. $n = 7$. C. $n = 9$. D. $n = 11$.

Câu 50. Cho hàm số $y = \frac{\cos x}{x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y' + xy'' = -xy$. B. $2y' + xy'' = xy$. C. $y' + xy'' = -xy$. D. $y' + xy'' = xy$.

Câu 51. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+1}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n = \frac{1}{2}$. B. $\lim u_n = \frac{1}{4}$. C. $\lim u_n = +\infty$. D. $\lim u_n = 0$.

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là \mathbb{R} ?

A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông, SA vuông góc đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB, SD . Gọi P là giao điểm của SC và (AMN) . Khi đó góc giữa hai đường thẳng AP và MN bằng

A. $\frac{2\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{6}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 54. Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-10}{x-1} = 5$. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-10}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{4f(x)+9}+3)}$ bằng

A. 10.

B. $\frac{5}{3}$.

C. 1.

D. 2.

Câu 55. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$, $x \neq 0$.

A. C_{10}^3 .

B. C_{10}^{10} .

C. C_{10}^5 .

D. C_{10}^6 .

Câu 56. Cho biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{a|x| - 17} = \frac{2}{3}$. Giá trị của a thuộc khoảng nào sau đây:

A. $(-4; -1)$.

B. $(-7; -4)$.

C. $(1; 4)$.

D. $(3; 5)$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (6,0 điểm)

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$

Câu 2 (1,0 điểm). Cho khai triển $(3x^2 - 2)^3 (2x - 3)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{14}x^{14}$. Tìm a_{11}

Câu 3 (1,5 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2(xy - x + y) & (1) \\ x^3 + 3y^2 + 5x - 12 = (12 - y)\sqrt{3 - x} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Câu 4 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 13$, đường tròn $(C_2): (x - 6)^2 + y^2 = 25$

a) Tìm giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

b) Gọi giao điểm có tung độ dương của (C_1) và (C_2) là A , viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Câu 5 (1,5 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) M là điểm di động trên đoạn BC và $BM = x$, K là hình chiếu của S trên DM . Tính độ dài đoạn SK theo a và x . Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn SK .

----- HẾT -----

I. TRẮC NGHIỆM: (14 điểm). Mỗi câu trả lời đúng được 0,25 điểm

Mã đề [123]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	D	D	A	D	C	C	A	B	A	C	C	A	C	C	B	A	D	B	D	C	D	D	A	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	A	C	C	D	D	D	D	B	A	D	D	D	D	C	B	A	C	C	D	B	B	B	A
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
A	B	D	C	D	C																			

Mã đề [234]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	D	D	D	B	A	C	A	C	C	C	D	B	C	C	B	A	C	A	B	B	C	B	B	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	A	D	D	D	B	B	A	C	A	A	D	D	B	A	B	D	B	C	A	C	B	A	B	D
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
A	B	B	A	B	D																			

Mã đề [345]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	A	C	B	B	B	B	D	C	A	C	A	C	A	B	B	D	B	C	D	D	A	D	B	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	B	B	C	A	D	C	C	B	A	C	A	B	A	C	A	D	D	D	C	D	B	B	D	A
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
A	D	D	A	A	D																			

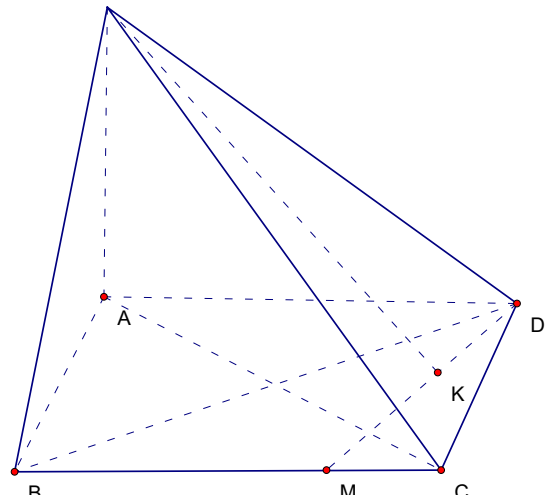
Mã đề [456]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	D	C	C	C	A	C	A	D	C	B	A	C	D	D	D	D	A	D	A	D	A	A	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	D	B	B	C	C	D	D	C	B	D	D	C	D	C	B	A	D	D	B	A	C	B	D
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
A	C	B	B	D	C																			

II. TỰ LUẬN: (6 điểm)

Câu	Đáp án	Điểm
1 (1,0 điểm)	Giải phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$	
	$PT \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = -\frac{3}{2} (L) \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	0,5
2	$(3x^2 - 2)^3 (2x - 3)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{14}x^{14}$. Tìm a_{11}	

(1,0 điểm)	$(3x^2 - 2)^3 (2x - 3)^8 = \left[\sum_{k=0}^3 C_3^k (3x^2)^k (-2)^{3-k} \right] \left[\sum_{h=0}^8 C_8^h (2x)^h (-3)^{8-h} \right]$ $\Leftrightarrow (3x^2 - 2)^3 (2x - 3)^8 = \left[\sum_{k=0}^3 C_3^k 3^k (-2)^{3-k} \cdot x^{2k} \right] \left[\sum_{h=0}^8 C_8^h 2^h (-3)^{8-h} \cdot x^h \right]$	0,25
	Theo yêu cầu ta có $\begin{cases} 2k + h = 11 \\ 0 \leq k \leq 3 \\ 0 \leq h \leq 8 \\ k, h \in \mathbb{N} \end{cases}$	0,25
	$\Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ h = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 3 \\ h = 5 \end{cases}$	0,25
	suy ra $a_{11} = C_3^2 3^2 (-2) C_8^7 2^7 (-3) + C_3^3 3^3 C_8^5 2^5 (-3)^3 = -1140480$	0,25
3 (1,5 điểm)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2(xy - x + y) & (1) \\ x^3 + 3y^2 + 5x - 12 = (12 - y)\sqrt{3 - x} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$	
	$(1) \Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$	0,25
	Thay $y = x + 1$ vào phương trình (2) ta được phương trình $x^3 + 3x^2 + 11x - 9 = (11 - x)\sqrt{3 - x}$ $\Leftrightarrow (x + 1)^3 + 5(x + 1) = (\sqrt{3 - x} + 1)^3 + 5(\sqrt{3 - x} + 1) \quad (3)$	0,25
	Đặt $a = x + 1; b = \sqrt{3 - x} + 1$, phương trình (3) trở thành $\Leftrightarrow a^3 + 5a = b^3 + 5b$ Nếu $a > b$ thì $a^3 + 5a > b^3 + 5b$ Nếu $a < b$ thì $a^3 + 5a < b^3 + 5b$ Nếu $a = b$ thì $a^3 + 5a = b^3 + 5b$ Vậy $a = b$.	0,25
	Do đó $(3) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3 - x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3 - x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ với $\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$	0,25
4 (1,0 điểm)	Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 13$, đường tròn $(C_2): (x - 6)^2 + y^2 = 25$ a) Tìm giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2) . b) Gọi giao điểm có tung độ dương của (C_1) và (C_2) là A , viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.	
	a) (C_1) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R_1 = \sqrt{13}$, (C_2) có tâm $I(6;0)$, bán kính $R_2 = 5$. Giao điểm của (C_1) và (C_2) $A(2;3)$ và $B(2;-3)$.	0,5
	b) Vì A có tung độ dương nên $A(2;3)$ Đường thẳng d qua A có pt: $a(x - 2) + b(y - 3) = 0$ hay $ax + by - 2a - 3b = 0$ Gọi $d_1 = d(O; d); d_2 = d(I; d)$ Yêu cầu bài toán trở thành $R_2^2 - d_2^2 = R_1^2 - d_1^2 \Rightarrow d_2^2 - d_1^2 = 12$	0,25

	$\Leftrightarrow \frac{(4a-3b)^2}{a^2+b^2} - \frac{(2a+3b)^2}{a^2+b^2} = 12 \Rightarrow b^2 + 3ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=-3a \end{cases}$ <p>* $b=0$, chọn $a=1$, suy ra pt đ là: $x-2=0$.</p> <p>* $b=-3a$, chọn $a=1; b=-3$, suy ra pt đ là: $x-3y+7=0$.</p>	0,25
5 (1,5 điểm)	<p>Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.</p> <p>a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.</p> <p>b) M là điểm di động trên đoạn BC và $BM=x$, K là hình chiếu của S trên DM. Tính độ dài đoạn SK theo a và x. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn SK</p>	0,5
		
	<p>a) SA vuông góc với $mp(ABCD)$ nên SA vuông góc với AB và AD. Vậy $\triangle SAB$ và $\triangle SAD$ vuông tại A</p> <p>Lại có SA vuông góc với $(ABCD)$ và $AB \perp BC$ nên SB vuông góc với BC. Vậy tam giác SBC vuông tại C. Tương tự tam giác SDC vuông tại D.</p>	
	<p>b) Ta có $BM=x$ nên $CM=a-x$</p> <p>Ta có $\triangle AKD$ đồng dạng với $\triangle DCM$ (vì có $\widehat{AKD} = \widehat{DCM} = 90^\circ, \widehat{DAK} = \widehat{CDM}$)</p> $\Rightarrow \frac{AK}{CD} = \frac{AD}{DM}$	0,25
	$\Rightarrow AK = DC \cdot \frac{AD}{DM} = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2}}$ <p>Tam giác SAK vuông tại A nên $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = a \cdot \sqrt{\frac{x^2 - 2ax + 3a^2}{x^2 - 2ax + 2a^2}}$</p>	0,25
	<p>SK nhỏ nhất khi và chỉ khi AK nhỏ nhất $\Leftrightarrow K \equiv O \Leftrightarrow x=0$</p>	0,25
	<p>Vậy SK nhỏ nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$</p>	0,25

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:

I. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB. Gọi M là điểm bất kì trên cạnh BC (không trùng với B, C). Thiết diện của mặt phẳng (MEF) với hình chóp $S.ABCD$ là:

- A. Hình tam giác B. Hình bình hành C. Hình thoi D. Hình thang

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{\sin x - 2}{\sin x - m}$. Tìm các giá trị m để $y' > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

- A. $m \leq 0$ hoặc $m > 2$ B. $m \leq -1$ hoặc $0 \leq m < 2$
C. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$ D. $m < 2$

Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AA' = a\sqrt{6}$. Gọi E là trung điểm của $B'C'$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng $(ABB'A')$ thì:

- A. $\sin \varphi = \frac{1}{6}$ B. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, BC, AB đôi một vuông góc với nhau. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. $SA \perp (ABC)$ B. $AM \perp (SBC)$ C. $AB \perp (SBC)$ D. $BC \perp (SAB)$

Câu 5: Cho tứ diện ABCD đều cạnh bằng a. Hãy chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 1\text{cm}$ và $BC = \sqrt{2}\text{ cm}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, biết SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Cho $AB = a; SB = a; SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng:

- A. 90° B. 45° C. 60° D. 30°

Câu 8: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn : $C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + \dots + n.C_n^n = (n - 304).2^n$

- A. 608 B. 2019 C. 305 D. 2018

Câu 9: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$ B. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2}$ C. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+4}{x^2-4x+4}$ D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2+4}{x-2}$

Câu 10: Khi phân tích số 1000! thành tích các thừa số nguyên tố, số các thừa số 3 là:

- A. 499 B. 500 C. 501 D. 498

Câu 11: Ông B gửi ngân hàng 100 triệu đồng (kỳ hạn tháng) với lãi suất không đổi 0,5% một tháng . Hỏi sau ít nhất mấy tháng thì ông B rút cả vốn và lãi đủ tiền để mua một chiếc xe máy trị giá 130 triệu đồng?

- A. 52 B. 53 C. 60 D. 61

Câu 12: Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2851} \\ (u_{n+1})^2 = (u_n)^2 + n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Số hạng thứ 2020 của dãy số (u_n) là:

- A. 1427 B. 1429 C. 2019 D. 1428

Câu 13: Cho biết $\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{(2ax-b+1)\sqrt{4x-1}}{(4x-1)^2}$, với a,b là số nguyên. Tính giá trị biểu thức

$$P = 3b - 2a$$

- A. $P = 29$ B. $P = -13$ C. $P = 19$ D. $P = 23$

Câu 14: Số phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, biết tiếp tuyến song song với

đường thẳng d : $y = 8x - \frac{97}{3}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương là:

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 15: Với m là hằng số dương. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4mx + 2019} + x)$ ta được kết quả bằng

- A. $-2m$ B. $\frac{1}{2m}$ C. $2m$ D. $-\frac{1}{2m}$

Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, tam giác SAB là đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là trung điểm của AD . Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCM) là :

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $a\sqrt{2}$ C. $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$ D. $3a\sqrt{2}$

Câu 17: Hàm số nào sau đây liên tục trên R ?

- A. $y = \frac{1}{6 + \tan^2 x}$ B. $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$
C. $y = \sqrt{x^4 - 7x^2 - 8}$ D. $y = \frac{\sin 3x - 1}{2 \sin x - \cos x - 3}$

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m-2)x^3 - (m-2)x^2 + (2m+1)x - 5m$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m trên khoảng $(-3; 7)$ sao cho $y'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng các phần tử của tập S ta được kết quả là

- A. 19 B. 20 C. 17 D. 18

Câu 19: Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9 (mỗi thẻ ghi một số). Rút ngẫu nhiên 3 thẻ và nhân 3 số ghi trên 3 thẻ đó với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là một số lẻ ?

- A. $\frac{5}{42}$ B. $\frac{1}{42}$ C. $\frac{11}{42}$ D. $\frac{5}{84}$

Câu 20: Cho hàm số $y = x \cdot \cos x$. Chọn khẳng định **Đúng**?

- A. $2(\cos x - y') + x(y'' + y) = 1$ B. $2(\cos x - y') - x(y'' + y) = 0$
C. $2(\cos x - y') + x(y'' + y) = 0$ D. $2(\cos x - y') - x(y'' + y) = 1$

II. CÂU HỎI TỰ LUẬN (4 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{-5x-6}{x+2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp

tuyến tạo với trục tung một góc 45^0 .

Câu 2. Tính giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} + \cos x - 3}{x^2}$

Câu 3 . Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, biết $AB = a$; $AC = 2a$; $CC' = 2a$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm A'B' và BC'. Tính góc giữa hai đường thẳng IM và AC'

Câu 4. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, biết SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng 45^0 . Gọi E, M lần lượt là trung điểm của SC và SA. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và BE.

----- **HẾT** -----

CÂU	MÃ 001	MÃ 002	MÃ 003	MÃ 004
1	D	D	A	A
2	B	A	C	A
3	A	C	B	C
4	C	A	D	C
5	D	C	C	B
6	C	B	D	D
7	A	D	C	C
8	A	C	C	B
9	D	D	A	C
10	D	B	C	C
11	B	C	B	D
12	B	C	B	D
13	C	A	B	D
14	A	B	A	B
15	C	B	D	A
16	B	D	B	B
17	D	B	A	B
18	B	A	D	D
19	A	D	D	A
20	C	A	A	A



**KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
KHU VỰC ĐUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ
LẦN THỨ XII, NĂM 2019**

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN HỌC 11

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 20/4/2019

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1 (4 điểm). Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện

$$u_{n+2} \geq \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Câu 2 (4 điểm). Cho $\triangle ABC$ có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB ở D, E, F . Đường thẳng qua A song song BC cắt DE, DF lần lượt tại M, N . Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN cắt đường tròn (I) tại điểm L khác D .

a) Chứng minh A, K, L thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN tại M, N cắt EF tại U, V . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác UVL tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

Câu 3 (4 điểm). Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho với mọi số n nguyên dương, phương trình $P(x) = 2^n$ có nghiệm nguyên.

Câu 4 (4 điểm). Cho p là số nguyên tố có dạng $12k + 11$. Một tập con S của tập

$$M = \{1; 2; 3; \dots; p-2; p-1\}$$

được gọi là “tốt” nếu như tích của tất cả các phần tử của S không nhỏ hơn tích của tất cả các phần tử của $M \setminus S$. Ký hiệu Δ_S hiệu của hai tích trên. Tìm giá trị nhỏ nhất của số dư khi chia Δ_S cho p

xét trên mọi tập con tốt của M có chứa đúng $\frac{p-1}{2}$ phần tử.

Câu 5 (4 điểm). Cho đa giác lồi n đỉnh $A_0A_1\dots A_{n-1}$ ($n \geq 2$). Mỗi cạnh và đường chéo của đa giác được tô bởi một trong k màu sao cho không có hai đoạn thẳng nào cùng xuất phát từ một đỉnh cùng màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của k .

----- HẾT -----

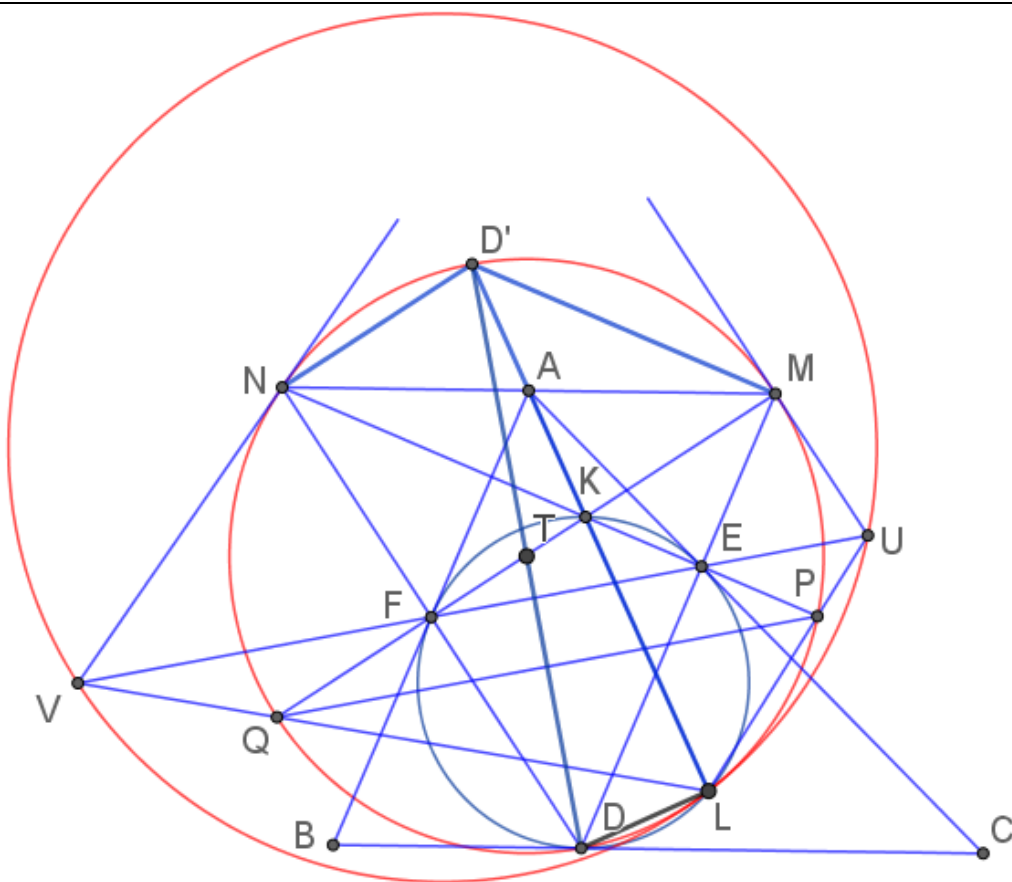
(Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐÁP ÁN

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	<p>Đề xuất của trường THPT chuyên Biên Hòa, Hà Nam</p> <p>Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ bị chặn trên và thoả mãn điều kiện</p> $u_{n+2} \geq \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$ <p>Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.</p>	4,0
	<p>Ta có $u_{n+2} \geq \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n \Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{3}{5}u_{n+1} \geq u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$ (1)</p> <p>Đặt $v_n = u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$ thì từ (1) ta có $v_{n+1} \geq v_n, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$ (2)</p>	1,0
	<p>Vì dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ bị chặn trên nên tồn tại số M sao cho $u_n \leq M, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$ suy ra</p> $v_n \leq M + \frac{3}{5}M = \frac{8}{5}M, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$ (3) <p>Từ (2) và (3) ta thấy dãy (v_n) không giảm và bị chặn trên. Do đó, nó là dãy hội tụ.</p>	0,5
	<p>Đặt $\lim v_n = a$ và $b = \frac{5a}{8}$. Ta sẽ chứng minh $\lim u_n = b$.</p> <p>Thật vậy, vì $\lim v_n = a$ nên $\forall \varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $v_n - a < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \forall n \geq n_0$.</p> <p>Khi đó, nhờ có đánh giá</p> $ u_{n+1} - b - \frac{3}{5} u_n - b < \left (u_{n+1} - b) + \frac{3}{5}(u_n - b) \right = \left u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n - \frac{8b}{5} \right < \frac{\varepsilon}{5},$ <p>ta thu được</p> $ u_{n+1} - b < \frac{3}{5} u_n - b + \frac{\varepsilon}{5}, \quad \forall n \geq n_0$	1,0
	<p>Từ sự kiện này ta suy ra</p> $ u_{n_0+1} - b < \frac{3}{5} u_{n_0} - b + \frac{\varepsilon}{5};$ $ u_{n_0+2} - b < \frac{3}{5} u_{n_0+1} - b + \frac{\varepsilon}{5} < \left(\frac{3}{5}\right)^2 u_{n_0} - b + \frac{3}{5} \cdot \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5};$ <p style="text-align: center;">.....</p> $ u_{n_0+k} - b < \left(\frac{3}{5}\right)^k u_{n_0} - b + \frac{\varepsilon}{5} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{k-2} + \dots + \frac{3}{5} + 1 \right].$ <p>hay</p>	1,0

	$\left u_{n_0+k} - b \right < \left(\frac{3}{5} \right)^k \left u_{n_0} - b \right + \frac{\varepsilon}{5} \frac{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^k}{1 - \frac{3}{5}} < \left(\frac{3}{5} \right)^k \left u_{n_0} - b \right + \frac{\varepsilon}{2}.$	
	<p>Do đó $\left u_{n_0+k} - b \right < \varepsilon$ với k đủ lớn tức là $\left u_n - b \right < \varepsilon$ với n đủ lớn và $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý. Vậy $\lim u_n = b$</p> <p>Hay dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn (đpcm).</p>	0,5
2	<p>Đề xuất của trường THPT chuyên Lào Cai, tỉnh Lào Cai</p> <p>Cho $\triangle ABC$ có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB ở D, E, F. Đường thẳng qua A song song BC cắt DE, DF lần lượt tại M, N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN cắt đường tròn (I) tại điểm L khác D.</p> <p>a) Chứng minh A, K, L thẳng hàng.</p> <p>b) Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN tại M, N cắt EF tại U, V. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác UVL tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.</p>	4,0



a) Trước hết ta chứng minh K là trực tâm $\triangle MDN$. Thật vậy:

Do $AN \parallel BC$ nên $\widehat{ANF} = \widehat{FDB}$.

Do D, E, F là tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB nên $BD = BF$

$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{ANF} = \widehat{BFD} = \widehat{AFN} \Rightarrow \triangle ANF$ cân tại $A \Rightarrow AN = AF$.

Chứng minh tương tự ta có $AM = AE$ mà $AE = AF$ nên

$AN = AF = AE = AM \Rightarrow \triangle NEM$ vuông tại E ; $\triangle NFM$ vuông tại F

$\Rightarrow NE \perp MD; MF \perp ND$ mà $NE \cap MF = K$ suy ra K là trực tâm $\triangle MDN$

1,0

-Bây giờ ta chứng minh A, K, L thẳng hàng:

+ Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN . Gọi D' là điểm đối xứng của D qua T . Ta có $ND' \parallel KM$ (vì cùng vuông góc với ND), $MD' \parallel KN$ (vì cùng vuông góc với MD). Do đó $ND'MK$ là hình bình hành. Do A là trung điểm MN nên K cũng là trung điểm DD' .

Do đó D', A, K thẳng hàng. (1)

+ Hơn nữa, tứ giác $DFKL$ nội tiếp đường tròn đường kính DK nên DL vuông góc với LK . Mặt khác DD' là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN nên DL vuông góc với LD' . Do đó L, K, D' thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, K, L thẳng hàng (đpcm).

1,0

b) Gọi P là giao của UL và (DMN) ($P \neq L$); Q là giao LV và (DMN) ($Q \neq L$).

Do MU tiếp xúc (DMN) tại M nên $\widehat{DMU} = \widehat{DNM}$. Lại có $\widehat{MEU} = \widehat{FNM}$ (do

$NMEF$ nội tiếp đường tròn đường kính MN) nên $\widehat{UME} = \widehat{UEM} \Rightarrow \triangle UME$ cân tại

1,0

	$U \Rightarrow UM = UE.$ Ta có $UM^2 = UP.UL \Rightarrow UP.UL = UE^2 \Rightarrow \frac{UE}{UP} = \frac{UL}{UE} \Rightarrow \Delta UEP \sim \Delta ULE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{UPE} = \widehat{UEL} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{UPE} = 180^\circ - \widehat{UEL} \Rightarrow \widehat{EPL} = \widehat{LEF}$ (3)	
	Lại có $\widehat{LEF} = 180^\circ - \widehat{LDF}$ (do $LEFD$ nội tiếp) và $\widehat{LPN} = 180^\circ - \widehat{LDN}$ (do $LPND$ nội tiếp) nên $\widehat{LPN} = \widehat{LEF}$ (3). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{LPN} = \widehat{EPL} \Rightarrow P; E; N$ thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có $Q; E; M$ thẳng hàng. Do $MNQP$ nội tiếp nên $\widehat{NMQ} = \widehat{NPQ}$. Do $NMEF$ nội tiếp nên $\widehat{NMF} = \widehat{NEF}$. Do đó $\widehat{NEF} = \widehat{NPQ} \Rightarrow EF \parallel PQ \Rightarrow UV \parallel PQ$. Do đó (LQP) tiếp xúc với (LUV) tại L suy ra (UVL) tiếp xúc với (DMN) tại L (đpcm).	1,0
3	Đề xuất của trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Quảng Trị Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho với mọi số n nguyên dương, phương trình $P(x) = 2^n$ có nghiệm nguyên.	4,0
	Rõ ràng $\deg(P) > 0$. Đặt $\deg(P) = m$ và a là hệ số bậc cao nhất của P , không mất tổng quát, coi $a > 0$. Gọi x_n là nghiệm nguyên lớn nhất của phương trình $P(x) = 2^n$. Dễ thấy $\lim x_n = +\infty$ nên $\lim \frac{ax_n^m}{2^n} = 1$, và do đó $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt[m]{2}$.	1,0
	Hơn nữa, do $x_{n+1} - x_n$ là ước của $P(x_{n+1}) - P(x_n)$ nên $x_{n+1} - x_n = 2^{k_n}$, với k_n là số tự nhiên nào đó. Suy ra $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{2^{k_n}}{x_n}$ và $(\sqrt[m]{2} - 1)^m = \lim \left(\frac{2^{k_n}}{x_n} \right)^m = \lim \frac{a \cdot 2^{m \cdot k_n}}{a x_n^m} = a \cdot \lim 2^{m \cdot k_n - n}$.	1,0
	Do đó, dãy $(m \cdot k_n - n)$ phải hội tụ đến l (nguyên) nào đó. Kéo theo $(\sqrt[m]{2} - 1)^m = a \cdot 2^l$. Do đó, m phải bằng 1.	1,0
	Đặt $P(x) = ax + b$. Từ $a(x_2 - x_1) = 2$ ta suy ra $a = \pm 1, \pm 2$. Từ đó, ta tìm được tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn là $P(x) = a(x + k)$ với $a = \pm 1, \pm 2$ và k là một số nguyên tùy ý.	1,0
4	Đề xuất của trường THPT chuyên Bình Long, tỉnh Bình Phước	4,0

	<p>Cho p là số nguyên tố có dạng $12k + 11$. Một tập con S của tập</p> $M = \{1; 2; 3; \dots; p-2; p-1\}$ <p>được gọi là “tốt” nếu như tích của tất cả các phần tử của S không nhỏ hơn tích của tất cả các phần tử của $M \setminus S$. Ký hiệu Δ_S hiệu của hai tích trên. Tìm giá trị nhỏ nhất của số dư khi chia Δ_S cho p xét trên mọi tập con tốt của M có chứa đúng $\frac{p-1}{2}$ phần tử.</p>	
	<p>Trước hết, xét tập con $S = \left\{ \frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \dots, p-2, p-1 \right\}$ thì rõ ràng S là tập con tốt và</p> $\Delta_S = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2} \right)! - \left(\frac{p-1}{2} \right)! \equiv -2 \left(\frac{p-1}{2} \right)! = 2a \pmod{p},$ <p>trong đó $a = -\left(\frac{p-1}{2} \right)!$ và thỏa mãn $p \mid a^2 - 1$ theo định lý Wilson.</p>	1,0
	<p>Ta xét các trường hợp:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Nếu $a \equiv 1 \pmod{p}$ thì $\Delta_S = 2 \pmod{p}$. - Nếu $a \equiv -1 \pmod{p}$ thì trong tập con S, thay $\frac{p+1}{2}$ bởi $\frac{p-1}{2} \equiv -\frac{p+1}{2} \pmod{p}$ thì dễ thấy dấu của Δ_S sẽ được thay đổi thành 2. Khi đó, trong cả hai trường hợp, ta đều chỉ ra được tập con tốt có $\Delta_S = 2 \pmod{p}$. 	1,0
	<p>Ta sẽ chứng minh rằng không tồn tại S tốt sao cho $\Delta_S = 1 \pmod{p}$. Xét một tập con tốt S bất kỳ và gọi a, a' lần lượt là tích các phần tử của $S, M \setminus S$. Theo định lý Wilson thì $aa' = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.</p>	1,0
	<p>Khi đó, nếu $a \equiv a' \pmod{p}$ thì $p \mid a^2 + 1$, vô lý vì ta đã biết $a^2 + 1$ không có ước nguyên tố dạng $4k + 3$. Còn nếu $a - a' \equiv 1 \pmod{p}$ thì $(2a-1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$, cũng vô lý vì $\left(\frac{-3}{p} \right) = -1$ do theo giả thiết thì $p \equiv 11 \pmod{12}$. Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là 2.</p>	1,0
5	<p>Đề xuất của trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bình Định</p> <p>Cho đa giác lồi n đỉnh $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ ($n \geq 2$). Mỗi cạnh và đường chéo của đa giác được tô bởi một trong k màu sao cho không có hai đoạn thẳng nào cùng xuất phát từ một đỉnh cùng màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của k.</p>	
	<p>Dễ thấy $k_{\min} \geq n-1$, bởi vì $k < n-1$ thì hiển nhiên có hai đoạn thẳng xuất phát từ một đỉnh được tô cùng một màu.</p>	0,5
	<p>TH1. Nếu n là số chẵn thì gọi các màu cần tô là $0, 1, \dots, n-2$. Ta tô màu như sau:</p> <p>$A_i A_j$ tô màu $i+j \pmod{n-1}$ ($0 \leq i, j \leq n-2$) và $A_i A_{n-1}$ tô màu $2i \pmod{n-1}$ ($0 \leq i \leq n-2$)</p>	1,0
	<p>Cách tô màu này thỏa mãn đề bài. Thật vậy</p>	0,5

	<p>+ Nếu $A_i A_j, A_i A_k$ ($0 \leq i, j, k \leq n-2$) tô cùng màu thì $j \equiv k \pmod{n-1}$. Vô lí !</p> <p>+ Nếu $A_i A_{n-1}, A_i A_j$ ($0 \leq i, j \leq n-2$) tô cùng màu thì $i \equiv j \pmod{n-1}$. Vô lí !</p> <p>+ Nếu $A_i A_{n-1}, A_j A_{n-1}$ ($0 \leq i, j \leq n-2$) cùng màu thì $2i \equiv 2j \pmod{n-1} \Leftrightarrow i \equiv j \pmod{n-1}$. Vô lí !</p> <p>Vậy cách như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.</p> <p>Như vậy $k_{\min} = n-1$. (1)</p>	
	<p>TH2: Nếu n là số lẻ thì giả sử tô với $n-1$ màu là $0, 1, \dots, n-2$. Khi đó, tất cả các đoạn thẳng có màu $1, \dots, n-2$ xóa hết chỉ còn lại các đoạn thẳng đều có màu 0. Suy ra $\deg A_i = 1$ do đó $\sum_{i=0}^{n-1} \deg A_i = n:2$ (Vì tổng số bậc bằng 2 lần số cạnh). Điều này vô lí.</p> <p>Do đó $k \geq n$.</p>	<p>1,0</p>
	<p>Với $k = n$ ta chỉ tô màu như sau: Gọi n màu cần tô là $0, 1, \dots, n-1$ thì $A_i A_j$ tô màu $i + j \pmod{n}$. Cách tô này thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy $A_i A_j, A_i A_k$ tô cùng màu thì $i \equiv j \pmod{n}$ vô lí.</p> <p>Như vậy $k_{\min} = n$. (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra $k_{\min} = 2 \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1$.</p>	<p>1,0</p>

Câu 1: Giải phương trình $\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$.

Câu 2: Cho khai triển nhị thức Newton $(x^2 - x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, ($n \in \mathbb{N}^*$). Tìm hệ số a_{10} , biết rằng $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 21$.

Câu 3: Một tấm vải hình chữ nhật được cuộn 100 vòng (theo chiều dài tấm vải) quanh một lõi hình trụ có bán kính đáy bằng 5cm sao cho mép vải luôn song song với trục của hình trụ. Biết rằng bề dày tấm vải là 0,3cm. Tính chiều dài tấm vải đó.



Câu 4: Chứng minh rằng phương trình $4x^5 + 2018x + 2019 = 0$ có duy nhất một nghiệm thực.

Câu 5: Từ 2018 số nguyên dương đầu tiên lấy ra 6 số xếp thành 1 dãy số có dạng $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Hỏi có bao nhiêu dãy số dạng trên biết a_1, a_2, a_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2018^2}{u_n^2 - u_n + 4036}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^2 + 2018}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim v_n$.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là một điểm trên cạnh AD sao cho $AM = \frac{1}{4}AD$, N là một điểm trên đường thẳng BD' , P là điểm trên đường thẳng CC' sao cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng. Tính tỉ số $\frac{MN}{MP}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SC = b$ và $SD = 2b$. Gọi M là trung điểm của BC , điểm P trên cạnh SD sao cho $SD = 4SP$. Mặt phẳng (α) qua M, P và song song với AC . Tính theo a, b diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Câu 9: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A , phương trình đường thẳng AB, AC lần lượt là $5x - y - 2 = 0$, $x - 5y + 14 = 0$. Gọi D là trung điểm của BC , E là trung điểm của AD , $M\left(\frac{9}{5}; \frac{8}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của D trên BE . Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

Câu 10: Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(b+c-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2 + (a+b)^2}.$$

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề có 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I (5,0 điểm).

1. Giải phương trình: $\sin^2 3x \cos 2x + \sin^2 x = 0$.

2. Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + a = 0$, x_3 và x_4 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 12x + b = 0$. Biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm a, b .

Câu II (3,0 điểm).

1. Cho k là số tự nhiên thỏa mãn: $5 \leq k \leq 2014$.

Chứng minh rằng: $C_5^0 C_{2014}^k + C_5^1 C_{2014}^{k-1} + \dots + C_5^5 C_{2014}^{k-5} = C_{2019}^k$.

2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

Câu III (3,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \sin 1$; $u_n = u_{n-1} + \frac{\sin n}{n^2}$, với $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định như trên là một dãy số bị chặn.

Câu IV (3,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều cạnh bằng a và tam giác BCD cân tại D với $DC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

1. Chứng minh rằng: $AD \perp BC$.

2. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , tính cosin góc giữa hai đường thẳng AG và CD , biết góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng 30° .

Câu V (3,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(2;1)$, $B(1;-2)$, trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{27}{2}$.

Câu VI (3,0 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{4}{a^2 + b^2} + 1\right)\left(\frac{4}{b^2 + c^2} + 1\right)\left(\frac{4}{c^2 + a^2} + 1\right) \geq 3(a + b + c)^2.$$

-----HẾT-----

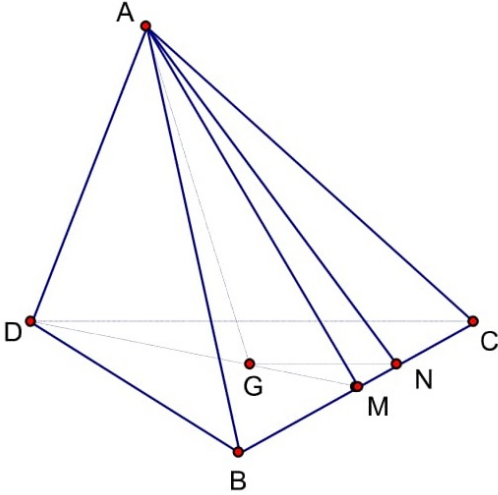
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và MTCT.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Hướng dẫn chấm – Toán 11

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I. (5đ)	Giải phương trình: $\sin^2 3x \cos 2x + \sin^2 x = 0$.	
1. (3đ)	$\sin^2 3x \cos 2x + \sin^2 x = 0$ (1) Ta có: $\sin 3x = (1 + 2 \cos 2x) \sin x$. (1) $\Leftrightarrow ((1 + 2 \cos 2x)^2 \cos 2x + 1) \sin^2 x = 0$ $\Leftrightarrow (1 + \cos 2x)(1 + 4 \cos^2 2x) \sin^2 x = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$	1.0đ 1.0đ 1.0đ
2. (2đ)	Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + a = 0$, x_3 và x_4 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 12x + b = 0$. Biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm a, b .	
	Gọi q là công bội của CSN $\Rightarrow x_2 = x_1 q; x_3 = x_1 q^2; x_4 = x_1 q^3$ Theo viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = a \\ x_3 + x_4 = 12 \\ x_3 x_4 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(1 + q) = 3 \\ x_1 x_2 = a \\ x_1 q^2(1 + q) = 12 \\ x_3 x_4 = b \end{cases}$ Suy ra $q^2 = 4$ $+ q = 2 \Rightarrow x_1 = 1$, giải ra được $a = 2, b = 32$ $+ q = -2 \Rightarrow x_1 = -3$, giải ra được $a = -18, b = -288$	1.0đ 1.0đ
Câu II. (3đ)		
1. (1.5đ)	Cho k là số tự nhiên thỏa mãn: $5 \leq k \leq 2014$ Chứng minh rằng: $C_5^0 C_{2014}^k + C_5^1 C_{2014}^{k-1} + \dots + C_5^5 C_{2014}^{k-5} = C_{2019}^k$ Ta có: $(1+x)^5 (1+x)^{2014} = (1+x)^{2019}$ $M = (1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5$ $N = (1+x)^{2014} = C_{2014}^0 + C_{2014}^1 x + \dots + C_{2014}^k x^k + \dots + C_{2014}^{2013} x^{2013} + C_{2014}^{2014} x^{2014}$ $P = (1+x)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + \dots + C_{2019}^k x^k + \dots + C_{2019}^{2018} x^{2018} + C_{2019}^{2019} x^{2019}$ Ta có hệ số của x^k trong P là C_{2019}^k , $P = M.N$ Mà số hạng chứa x^k trong $M.N$ là: $C_5^0 C_{2014}^k x^k + C_5^1 C_{2014}^{k-1} x^{k-1} + C_5^2 C_{2014}^{k-2} x^{k-2} + C_5^3 C_{2014}^{k-3} x^{k-3} + C_5^4 C_{2014}^{k-4} x^{k-4} + C_5^5 C_{2014}^{k-5} x^{k-5}$ Vậy: $C_5^0 C_{2014}^k + C_5^1 C_{2014}^{k-1} + \dots + C_5^5 C_{2014}^{k-5} = C_{2019}^k$	0.5đ 0.5đ 0.5đ
2. (1.5đ)	Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực: $m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$	
	ĐK: $-1 \leq x \leq 1$, Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$, t liên tục trên $[-1; 1]$ và $t \geq 0$ $\Rightarrow t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \leq 2 \Rightarrow t \in [0; \sqrt{2}]$ Pttt: $m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow m = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}$ Xét $f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}; t \in [0; \sqrt{2}]$, $f(t)$ liên tục trên $[0; \sqrt{2}]$ $f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t+2)^2} < 0, \forall t \in (0; \sqrt{2})$	0.5đ 0.5đ

	$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[0; \sqrt{2}]$ Vậy pt đã cho có nghiệm thực khi $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1 = f(0)$	0.5đ
Câu III. (3đ)	Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \sin 1$; $u_n = u_{n-1} + \frac{\sin n}{n^2}$, với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định như trên là một dãy số bị chặn.	
	Ta có: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, vì $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n.(n-1)} =$ $= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$ Bằng qui nạp ta CM được: $u_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2}$ Suy ra: $-2 < -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Vậy dãy số (u_n) xác định như trên là một dãy số bị chặn.	1.0đ 1.0đ 1.0đ
Câu IV. (3đ)	Cho tứ diện ABCD có tam giác ABC đều cạnh bằng a và tam giác BCD cân tại D với $DC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.	
1. (1đ)	Chứng minh rằng: $AD \perp BC$.	
	Gọi M là trung điểm BC, ta có: $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$, $\triangle DBC$ cân nên $DM \perp BC \Rightarrow BC \perp (AMD) \Rightarrow BC \perp AD$.	1.0đ
2. (2đ)	Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, tính cosin góc giữa hai đường thẳng AG và CD, biết góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng 30° .	
		
	Theo gt ta có góc giữa MA và MD bằng 30° . Kẻ $GN \parallel CD$, nối AN +TH1: góc DAM bằng 30° , ta có: $MD = a \Rightarrow MG = \frac{a}{3}$, $\triangle ABC$ đều nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Áp dụng định lí cosin cho $\triangle AMG$ ta có $AG = \frac{a\sqrt{13}}{6}$, $GN = \frac{CD}{3} = \frac{a\sqrt{5}}{6}$. $\triangle ANC$ có $AN = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Trong $\triangle ANG$ có $\cos(\angle AGN) = \frac{-5}{\sqrt{65}}$. Gọi góc $(AG; CD) = \alpha$ thì $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{65}}$ +TH2: Góc AMD bằng 150° . Tính tương tự ta có: $\cos \alpha = \frac{13}{7\sqrt{5}}$	0.5đ 0.5đ 0.5đ

[illegible]

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI ĐỀ THI OLYMPIC NĂM HỌC 2018-2019
CỤM TRƯỜNG THPT MÔN TOÁN – KHỐI 11
HÀ ĐÔNG – HOÀI ĐỨC Thời gian làm bài : 150' (không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm 1 trang

Bài 1. (4,0 điểm). Giải các phương trình sau :

a) $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$.

b) $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$.

Bài 2. (4,0 điểm).

a) Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển: $(\frac{2}{x} - 3x^2)^{10}$ ($x \neq 0$).

b) Trong một hộp kín đựng 100 tấm thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên ba tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được ba tấm thẻ mà ba số ghi trên ba tấm thẻ đó lập thành một cấp số cộng.

Bài 3. (4,0 điểm).

a) Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{C_{2018}^0 + C_{2018}^2 x^2 + C_{2018}^4 x^4 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018} - 2^{2017}}{x-1}$.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2 \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Bài 4. (6,0 điểm).

a) Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh bằng nhau. Điểm M di động trên cạnh AB, điểm N di động trên cạnh A'D' sao cho A'N = 2AM. Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và song song với AC. Dựng thiết diện của hình hộp bởi (α) và chứng minh rằng (α) luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng:

$$(AB+CD)^2 + (AD+BC)^2 > (AC+BD)^2.$$

Bài 5. (2,0 điểm). Chứng minh rằng với mọi số thực $a, b, c \in [1;2]$ ta luôn có:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 10.$$

.....Hết.....

Học sinh không sử dụng tài liệu.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1.(3,50 điểm) Giải và biện luận bất phương trình sau theo tham số m :

$$\sqrt{x+2\sqrt{mx-m^2}} + \sqrt{x-2\sqrt{mx-m^2}} \leq 2\sqrt{m} \text{ với } m > 0.$$

Câu 2.(3,50 điểm) Cho bốn số thực p, q, m, n thỏa mãn hệ thức

$$(q-n)^2 + (p-m)(pn-qm) < 0.$$

Chứng minh rằng hai phương trình

$$x^2 + px + q = 0 \text{ và } x^2 + mx + n = 0$$

đều có các nghiệm phân biệt và các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số.

Câu 3.(4,00 điểm) Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Chứng minh rằng $a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc$.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{a(bc-IA^2)} + \sqrt{b(ca-IB^2)} + \sqrt{c(ab-IC^2)} \leq \sqrt{6abc}$.

Hãy chỉ ra một trường hợp xảy ra dấu đẳng thức.

Câu 4.(4,00 điểm) Cho x, y, z là 3 số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + 2019zx$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = xy + yz + 2zx$.

Câu 5.(3,00 điểm) Cho dãy số thực (x_n) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} 0 < x_n < 1 \\ x_{n+1}(1-x_n) \geq \frac{1}{4}, \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $x_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

b) Tìm giới hạn của dãy (x_n) .

Câu 6.(2,00 điểm) Cho hàm số f liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn

i) $f(2020) = 2019$;

ii) $f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó kí hiệu $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$.

Hãy tính $f(2018)$.

-----Hết-----

Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí giám thị 1: Chữ kí giám thị 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

(Gồm có 5 trang)

1. Hướng dẫn chung

- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm chấm phải bảo đảm không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.
- Điểm bài thi không làm tròn số.

2. Đáp án và thang điểm

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1	Giải và biện luận bất phương trình sau theo m : $\sqrt{x+2\sqrt{mx-m^2}} + \sqrt{x-2\sqrt{mx-m^2}} \leq 2\sqrt{m} \text{ với } m > 0.$	3,50 đ
	Điều kiện: $\begin{cases} mx - m^2 \geq 0 \\ x + \sqrt{mx - m^2} \geq 0 \\ x - \sqrt{mx - m^2} \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq m \text{ (1).}$	0,50 đ
	Đặt $t = 2\sqrt{mx - m^2}; t \geq 0$. Thì $x = \frac{t^2 + 4m^2}{4m}$; $\sqrt{x + 2\sqrt{mx - m^2}} = \sqrt{\frac{t^2 + 4m^2}{4m}} + t = \sqrt{\frac{(t + 2m)^2}{4m}} = \frac{ t + 2m }{2\sqrt{m}};$ Và $\sqrt{x - 2\sqrt{mx - m^2}} = \sqrt{\frac{t^2 + 4m^2}{4m}} - t = \sqrt{\frac{(t - 2m)^2}{4m}} = \frac{ t - 2m }{2\sqrt{m}}.$	1,00 đ
	Khi đó bất phương trình đã cho là: $ t + 2m + t - 2m \leq 4m, m > 0 \text{ (2).}$	0,50 đ
	Vì $m > 0, t \geq 0$ nên $ t + 2m = t + 2m$ nên: $(2) \Leftrightarrow t + 2m + t - 2m \leq 4m \Leftrightarrow t - 2m \leq 2m - t, m \geq 0$ $\Rightarrow t - 2m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2m$	0,50 đ
	Nghĩa là $0 \leq 2\sqrt{mx - m^2} \leq 2m \Leftrightarrow m^2 \leq mx \leq 2m^2 \Leftrightarrow m \leq x \leq 2m$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [m; 2m]$.	1,00 đ
2	Cho 4 số thực p, q, m, n thỏa mãn hệ thức $(q - n)^2 + (p - m)(pn - qm) < 0 \text{ (1).}$ Chứng minh rằng 2 phương trình $x^2 + px + q = 0 \text{ (2)}$ và $x^2 + mx + n = 0 \text{ (3)}$ đều có các nghiệm phân biệt và các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số.	3,50 đ
	Từ điều kiện $(q - n)^2 + (p - m)(pn - qm) < 0$ suy ra $p - m \neq 0$.	0,50 đ

	Các phương trình (2) và (3) đều có hệ số $a = 1 > 0$ nên các parabol biểu diễn đều có bề lõm quay lên trên.	0,50 đ
	Hai pt có nghiệm phân biệt và nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số khi và chỉ khi đồ thị các hàm số $y = x^2 + px + q$ (C) và $y = x^2 + mx + n$ (C') cắt nhau tại 1 điểm nằm dưới trục hoành (4).	0,50 đ
	Hoành độ giao điểm của (C) và (C') là nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = x^2 + mx + n \Leftrightarrow x = \frac{n - q}{p - m}.$	0,50 đ
	Tung độ giao điểm của (C) và (C') là $y = \left(\frac{n - q}{p - m}\right)^2 + p\left(\frac{n - q}{p - m}\right) + q$ $= \frac{1}{(p - m)^2} \left[(n - q)^2 + p(n - q)(p - m) + q(p - m)^2 \right]$ $= \frac{1}{(p - m)^2} \left[(n - q)^2 + (p - m)(pn - qm) \right] < 0 \text{ (do (3)).}$	1,00 đ
	Vậy (4) được chứng minh, nên khẳng định của đề bài đã chứng minh xong.	0,50 đ
3		4,00 đ
	a) Chứng minh $a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc$	2,50 đ
	Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F. Gọi K là điểm đối xứng của I qua AC.	0,50 đ
	Ta có $\frac{S_{AFIE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{AI \cdot AK}{AB \cdot AC} = \frac{IA^2}{bc}.$	0,50 đ
	Tương tự $\frac{S_{BDIF}}{S_{ABC}} = \frac{IB^2}{ca}; \frac{S_{CEID}}{S_{ABC}} = \frac{IC^2}{ab}.$	0,50 đ
	Suy ra $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = \frac{S_{AFIE} + S_{BDIF} + S_{CEID}}{S_{ABC}} = 1$	0,50 đ
	Suy ra $a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc.$	0,50 đ
	b) Chứng minh $\sqrt{a(bc - IA^2)} + \sqrt{b(ca - IB^2)} + \sqrt{c(ab - IC^2)} \leq \sqrt{6abc}$	1,50 đ
	Áp dụng bất đẳng thức Bunhicovski ta có $\sqrt{a(bc - IA^2)} + \sqrt{b(ca - IB^2)} + \sqrt{c(ab - IC^2)}$ $\leq \sqrt{(1 + 1 + 1) \left[a(bc - IA^2) + b(ca - IB^2) + c(ab - IC^2) \right]}$ $= \sqrt{3 \left[3abc - (aIA^2 + bIB^2 + cIC^2) \right]} = \sqrt{6abc}.$	0,50 đ
	Dễ thấy khi $a = b = c$ hay tam giác ABC đều thì dấu đẳng thức xảy ra.	0,50 đ
4	Cho x, y, z là 3 số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$	4,00 đ
	a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = xy + yz + 2019zx$	2,00 đ
	Ta có: $0 \leq (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1 + 2(xy + yz + zx)$	0,50 đ

	Suy ra $xy + yz + zx \geq -\frac{1}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x + y + z = 0$.	
	Do vậy $P = (xy + yz + zx) + 2018zx \geq -\frac{1}{2} + 2018zx \geq -\frac{1}{2} - 2018\left(\frac{z^2 + x^2}{2}\right) \geq -\frac{1}{2} - \frac{2018}{2} = -\frac{2019}{2}.$	0,50 đ
	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x = -z \\ z^2 + x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0, x = -z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$ Vậy min $P = -\frac{2019}{2}$ khi $y = 0, x = -z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$	1,00 đ
	b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = xy + yz + 2zx$.	2,00 đ
	Xét các giá trị dương của x, y, z . Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên ta có thể đặt $\begin{cases} y = \cos \alpha \\ x = \sin \alpha \cos \beta, \text{ với } \alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ z = \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$	0,50 đ
	Thế thì $Q = y(x + z) + 2xz = \cos \alpha \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta) + 2 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta.$	
	Vì $\alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $Q \leq \sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha (1).$ Dấu “=” xảy ra khi $\cos \beta = \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$	0,50 đ
	Biến đổi (1) với dạng $Q \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha + \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{2} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha) \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$	0,50 đ
	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{-1}{\cos 2\alpha} \\ \sqrt{2} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ Suy ra $\begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}} \\ \cos \alpha = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}} \end{cases}$; tức là $y = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}, x = z = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{12}}.$ Vậy $\max Q = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ khi $y = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}, x = z = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{12}}.$	0,50 đ
5	Cho dãy số thực (x_n) thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0 < x_n < 1 \\ x_{n+1}(1 - x_n) \geq \frac{1}{4}, \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$ a) Chứng minh rằng $x_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$	3,00 đ

	b) Tìm giới hạn của dãy (x_n) .	
	a) Chứng minh rằng $x_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$	1,50 đ
	Ta chứng minh rằng bằng quy nạp: + Với $n = 1$, bất đẳng thức đúng.	0,50 đ
	+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$. Vì $x_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \Rightarrow 1 - x_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} = \frac{k+1}{2k}$.	0,50 đ
	Lại có: $x_{k+1}(1 - x_k) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x_{k+1} > \frac{2k}{4(k+1)} = \frac{k}{2(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}$. Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$. Vậy bất đẳng thức đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,50 đ
	b) Tìm giới hạn của dãy (x_n)	1,50 đ
	Ta có $(2x_n - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_n(1 - x_n) \leq \frac{1}{4}$. Kết hợp với (2) ta có: $x_n(1 - x_n) \leq x_{n+1}(1 - x_n) \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}$, dãy tăng.	0,50 đ
	Hơn nữa, theo (1) dãy bị chặn, nên tồn tại giới hạn $\lim x_n = x_0$.	0,50 đ
	Lấy giới hạn bất đẳng thức $x_{n+1}(1 - x_n) \geq \frac{1}{4}$ ta được $x_0(1 - x_0) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim x_n = \frac{1}{2}$.	0,50 đ
6	Cho hàm số f liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn i) $f(2020) = 2019$; ii) $f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$. Hãy tính $f(2018)$.	2,00 đ
	Kí hiệu $f_2(x) = f(f(x)), f_3(x) = f(f(f(x)))$. Gọi D_f là tập giá trị của hàm số $f(x)$. Từ (i) suy ra $2019 \in D_f$; từ $f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_4(2020) = \frac{1}{2019} \in D_f$ và $xf_3(x) = 1, \forall x \in D_f$.	0,50 đ
	Do f liên tục trên $D := \left[\frac{1}{2019}; 2019 \right] \subset D_f$ nên $f_3(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D$; Suy ra f là đơn ánh trên D và do f liên tục trên \mathbb{R} nên f nghịch biến trên D .	0,50 đ
	Giả sử tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$ (1). Do là hàm nghịch biến nên	

$f_2(x_0) < f\left(\frac{1}{x_0}\right) (2).$ <p>Và $\frac{1}{x_0} = f_3(x_0) > f_2\left(\frac{1}{x_0}\right)$ suy ra $f\left(\frac{1}{x_0}\right) < f_3\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 (3).$</p> <p>Từ (2) và (3) suy ra $x_0 > f_2(x_0)$ hay $f(x_0) < f_3(x_0) = \frac{1}{x_0}$, mâu thuẫn với (1).</p>	0,50 đ
<p>Tương tự, cũng không tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) < \frac{1}{x_0}$.</p> <p>Vậy $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D$. Do $2018 \in D$ nên suy ra $f(2018) = \frac{1}{2018}$.</p>	0,50 đ

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1: (5,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a. $2\cos^3 x - \sin 2x \cdot \sin x = -2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{2019\pi}{4}\right).$

b. $(x-2)^3 + 2\sqrt{(x-1)^3} = 3(x^2 - 3x + 2).$

Bài 2: (4,0 điểm)

a. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm năm chữ số được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn có mặt đúng ba chữ số khác nhau.

b. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Chứng minh phương trình $f(x) + [f(1) - f(0)]x = f(1)$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $[0;1]$.

Bài 3: (2,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 4}, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm công thức số hạng tổng quát

u_n của dãy số đã cho.

Bài 4: (4,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AD = 2a$, $AB = a$; O là giao điểm của AC với BD , SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \frac{a}{2}$. Gọi M là trung điểm của BC .

a. Chứng minh đường thẳng SM vuông góc với mặt phẳng (SAD) .

b. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) , tính $\sin \varphi$.

Bài 5: (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , có đỉnh $B(-3;2)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 7 = 0$. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC , biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và A có hoành độ dương.

Bài 6: (3,0 điểm)

a. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = ab + bc + ac$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{a^2 + 3bc} + \frac{b^2}{b^2 + 3ac} + \frac{c^2}{c^2 + 3ab} + \sqrt{a + b + c}$.

b. Tìm tất cả các bộ (n, k, p) , với n, k là các số nguyên lớn hơn 1 và p là một số nguyên tố thỏa mãn $n^5 + n^4 - 2n^3 - 2n^2 + 1 = p^k$.

.....HẾT.....

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu I (4,0 điểm)

1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - 2mx + 3$, biết rằng (P) có trục đối xứng là $x = 2$.

2. Giải phương trình: $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$.

Câu II (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{2\sin 2x - \cos 2x - 7\sin x + 4 + \sqrt{3}}{2\cos x + \sqrt{3}} = 1$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^3 - 4y^2 + 4y = \sqrt{x+1}(y^2 - 5y + 4 + \sqrt{x+1}) \\ 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 6x - 7 = y^2(x-1)^2 + (y^2 - 1)\sqrt{3x-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III (4,0 điểm)

1. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(2x + 2y + z)^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{8x^3 + 8y^3 + z^3}{(2x + 2y + z)(4xy + 2yz + 2zx)}.$$

2. Cho dãy số xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \cdot 4^n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n và tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{u_n}$.

Câu IV (4,0 điểm)

1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số khác nhau mà có mặt hai chữ lẻ và ba chữ số chẵn, trong đó mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?

2. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I, trọng tâm $G\left(\frac{8}{3}; 0\right)$, các điểm

$M(0;1), N(4;1)$ lần lượt đối xứng với I qua AB và AC, điểm $K(2;-1)$ thuộc đường thẳng BC. Viết phương trình đường tròn (C).

Câu V (4,0 điểm)

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Một mặt phẳng không qua S cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q thỏa mãn: $\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SP}$. Tính tỉ số $\frac{SB}{SN}$ khi biểu thức

$$T = \left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + 4\left(\frac{SD}{SQ}\right)^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

2. Cho hình lăng trụ ABCD.A₁B₁C₁D₁. Một mặt phẳng (α) thay đổi và luôn song song với đáy cắt các đoạn AB₁, BC₁, CD₁, DA₁ lần lượt tại M, N, P, Q. Hãy xác định vị trí của mp(α) sao cho diện tích MNPQ nhỏ nhất.

Câu I.2. Giải PT: $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$.

Đặt $\sqrt{7-x} = u \geq 0$; $\sqrt{x-1} = v \geq 0 \Rightarrow u^2 + v^2 = 6$ ta có pt:

$$v^2 + 1 + 2u = 2v + 1 + uv \Leftrightarrow 2(u-v) = v(u-v) \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 \\ v = u = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn). Vậy tập nghiệm } S = \{4; 5\}.$$

Câu II. 1. Giải phương trình: $\frac{2\sin 2x - \cos 2x - 7\sin x + 4 + \sqrt{3}}{2\cos x + \sqrt{3}} = 1$.

ĐK: $2\cos x + \sqrt{3} \neq 0$

$$\text{Từ pt} \Rightarrow 2\sin 2x - \cos 2x - 7\sin x + 4 = 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ 2\cos x + \sin x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \sin x = 1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ (loại nghiệm } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{)}. \text{ KL: nghiệm của pt là } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$$

Câu II. 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^3 - 4y^2 + 4y = \sqrt{x+1}(y^2 - 5y + 4 + \sqrt{x+1}) \\ 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 6x - 7 = y^2(x-1)^2 + (y^2 - 1)\sqrt{3x-2} \end{cases}$$

ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$. Từ pt đầu tương đương: $y(y-2)^2 - (y-2)^2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} - y)$

$$\Leftrightarrow (y - \sqrt{x+1})[(y-2)^2 + \sqrt{x+1}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y - 2 = x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1} \text{ (loại nghiệm } x = -1, y = 2)$$

Thế $y^2 = x+1$ ($y > 0$) vào pt thứ hai thì được:

$$2\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 2 + (3x - 2) - x\sqrt{3x-2} = (x+1)(x-1)^2 - (3x-3)$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 2} + \sqrt{3x-2}(\sqrt{3x-2} - x) = (x+1)(x-1)^2 - 3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 2} - \sqrt{3x - 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{3x - 2} + x} = (x^2 - 3x + 2)(x + 2)$$

$$+ \text{ TH1: } x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \cup x = 2 \Rightarrow \text{hệ có nghiệm } (x; y) = (1; \sqrt{2}) \cup (2; \sqrt{3}).$$

$$+ \text{ TH2: } \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 2} - \frac{\sqrt{3x - 2}}{\sqrt{3x - 2} + x} = x + 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 2} = \frac{\sqrt{3x - 2}}{\sqrt{3x - 2} + x} + x + 2 \quad (*)$$

Dễ thấy (*) vô nghiệm vì $x \geq \frac{2}{3}$ thì VT(*) < 1 < VP(*).

KL: hệ có nghiệm $(x; y) = (1; \sqrt{2}) \cup (2; \sqrt{3})$.

Câu III.1. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(2x + 2y + z)^2$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{8x^3 + 8y^3 + z^3}{(2x + 2y + z)(4xy + 2yz + 2zx)}$$

Đặt $\frac{2x}{2x + 2y + z} = a, \frac{2y}{2x + 2y + z} = b, \frac{z}{2x + 2y + z} = c \Rightarrow S = a + b + c = 1; a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$ và biểu thức P

$$\text{trở thành: } P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca}.$$

Ta có $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$ hay là:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$$

$a^3 + b^3 + c^3 = S^3 - 3S(ab + bc + ca) + 3abc$ thế vào P thì:

$$P = \frac{1 - 3(ab + bc + ca) + 3abc}{ab + bc + ca} \Rightarrow P + 3 = \frac{1 + 3abc}{ab + bc + ca}. \text{ Mặt khác từ giả thiết ta có:}$$

$$1 = S^2 = \frac{1}{2} + 2(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{1}{4} \text{ thế vào P thì ta được:}$$

$$P + 3 = 4 + 12abc \Rightarrow P = 1 + 12abc. \text{ Ta chứng minh } P = 1 + 12abc \leq \frac{11}{9}. \text{ Thật vậy khi đó bất } \Leftrightarrow 6abc \leq \frac{1}{9}.$$

$$\text{Ta có: } \left(a^2 + \frac{1}{36}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{36}\right) \geq \frac{a}{3} + \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} - c^2 + \frac{1}{18} \geq \frac{1}{3}(1 - c) \Rightarrow c \in \left(0; \frac{2}{3}\right]$$

$$\text{Xét } Q = 6abc = 2ab \cdot 3c \leq 4ab = 2\left[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)\right] = 2\left[(1 - c)^2 - \left(\frac{1}{2} - c^2\right)\right] \leq \frac{1}{9}$$

$\Leftrightarrow 2\left(1-2c+c^2-\frac{1}{2}+c^2\right)-\frac{1}{9}\leq 0 \Leftrightarrow c^2-c+\frac{2}{9}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq c\leq \frac{2}{3}$. Bất đúng nếu ta lấy c là số lớn nhất thì

$1=a+b+c\leq 3c\Rightarrow \frac{1}{3}\leq c$. Ta có đpcm. Vậy $\max P = \frac{11}{9}$ tại $a=b=\frac{1}{6}, c=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{4}z$.

Câu III.2. Cho dãy số xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \cdot 4^n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n và tính

giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{u_n}$.

Số hạng tổng quát có dạng $u_n = 4^n(an+b)$ thật vậy thay vào công thức truy hồi thì:

$4 \cdot 4^n(an+a+b) = 4 \cdot 4^n(an+b) + 4a \cdot 4^n = 4u_n + 4a \cdot 4^n$ ta chọn $a = \frac{3}{4}$ thì thỏa mãn công thức.

Với $u_1 = 4\left(b + \frac{3}{4}\right) = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{4} \Rightarrow u_n = 4^{n-1}(3n-1), n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{4^{n-1}(3n-1)} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{4^n(3n-1)} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-1} = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0$.

Câu IV.1. Có bao nhiêu số có 8 chữ số khác nhau mà có mặt hai chữ số lẻ và ba chữ số chẵn, trong đó mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?.

Gọi các chữ số lẻ khác nhau là x, y thuộc $A = \{1;3;5;7;9\}$ và ba chữ số chẵn khác nhau là a, b, c thuộc $B = \{0;2;4;6;8\}$.

+ TH1: Nếu chọn một chữ số x lẻ đứng đầu thì có 5 cách chọn, chữ số lẻ y còn lại và ba chữ số chẵn thì số cách chọn là $4 \cdot C_5^3$ và chọn lại bộ (a; b; c) có một cách. Bây giờ ta sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số (không kể số lẻ x đứng đầu) thì có cách khác nhau là: $4 \cdot C_5^3 \cdot 1 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$. (Ta nói x có 5 cách chọn nghĩa là đã xếp vị trí cho x, việc còn lại là sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số còn lại).

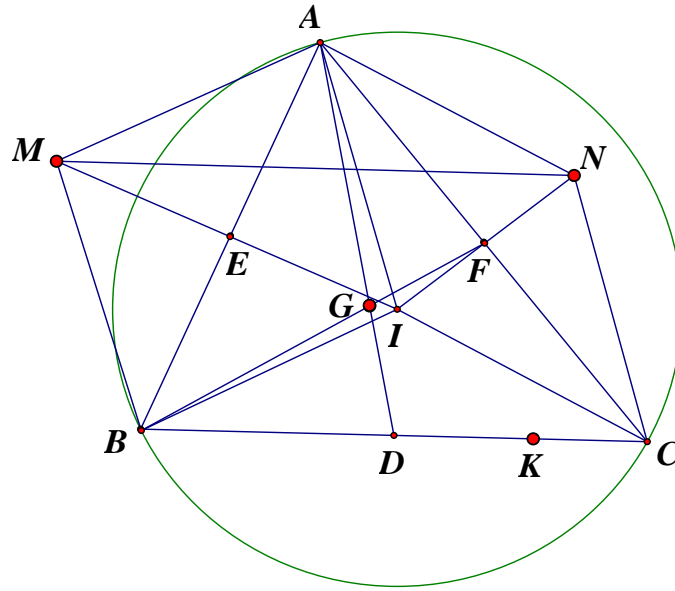
Vậy trường hợp 1 có các số thỏa mãn bài toán là: $5 \cdot 4 \cdot C_5^3 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 126000$ (số)

+ TH2: Nếu chọn một chữ số chẵn a đứng đầu thì có 4 cách, hai chữ số b, c có C_4^2 cách, chọn lại chữ số a có 1 cách, chọn lại cặp (b, c) có 1 cách. Chọn hai chữ số lẻ có C_5^2 cách. Bây giờ ta sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số (không tính a) thì số cách khác nhau là: $C_4^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot C_5^2 \cdot \frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 75600$.

Trường hợp 2 có số các số thỏa mãn là: $4 \cdot 75600 = 302400$ số.

Vậy số các số thỏa mãn bài toán là: $126000 + 302400 = 428400$ số.

Câu IV. 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I, trọng tâm $G\left(\frac{8}{3}; 0\right)$, các điểm $M(0;1), N(4;1)$ lần lượt đối xứng với I qua AB và AC, điểm $K(2;-1)$ thuộc đường thẳng BC. Viết phương trình đường tròn (C).



Ta thấy IM và IN vuông góc với các dây cung AB, AC nên đi qua các trung điểm E, F của AB và AC. Kết hợp tính đối xứng của M, N qua các cạnh AB, AC thì dễ dàng suy ra các hình AICN, AIBM là các hình thoi và do đó: $AM = AN = NC = BM = AI = IC = IB = R$.

Hơn nữa ta có $BM \parallel NC$ (cùng $\parallel AI$) và bằng nhau nên BMNC là hình bình hành suy ra $BC \parallel MN$. Phương trình MN là $y = 1$, và BC đi qua K nên có phương trình là $y = -1$.

Gọi $D(d; -1)$ là trung điểm của BC thì tọa độ của B và C là $B(d-b; -1)$ và $C(d+b; -1)$.

Vì $y_G = 0, y_B = y_C = -1 \Rightarrow y_A = 2$.

$$x_G = \frac{8}{3} \Rightarrow x_A + x_B + x_C = 8 \Rightarrow x_A + 2d = 8 \Rightarrow x_A = 8 - 2d \Rightarrow A(8 - 2d; 2).$$

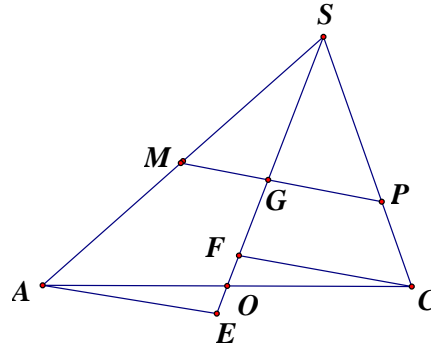
Mặt khác $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN} = (4; 0) \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$. Và $MB = MA = R \Rightarrow (d-2)^2 + 4 = (8-2d)^2 + 1$ nên $d = 3 \cup d = \frac{19}{3}$. Tương tự $NC = NA$ nên $(d-2)^2 + 4 = (4-2d)^2 + 1$ nên $d = 3$ là nghiệm chung của hai phương trình trên và khi đó tọa độ ba đỉnh: $B(1; -1), C(5; -1), A(2; 2)$.

Gọi $I(3; m)$, từ $IA = MA = R = \sqrt{5}$ ta có: $1 + (m-2)^2 = 5 \Rightarrow m = 0 \cup m = 4 \Rightarrow I(3; 0) \cup I(3; 4)$

Loại $I(3; 4)$ vì $IC \neq \sqrt{5}$. Vậy đường tròn (C) là: $(x-3)^2 + y^2 = 5$.

Câu V. 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Một mặt phẳng không qua S cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q thỏa mãn: $\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SP}$. Tính tỉ số $\frac{SB}{SN}$ khi biểu thức $T = \left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + 4\left(\frac{SD}{SQ}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $\frac{SB}{SN} = x, \frac{SD}{SQ} = y$. Gọi O là tâm hình bình hành và G là giao điểm của SO với mp(MNPQ).



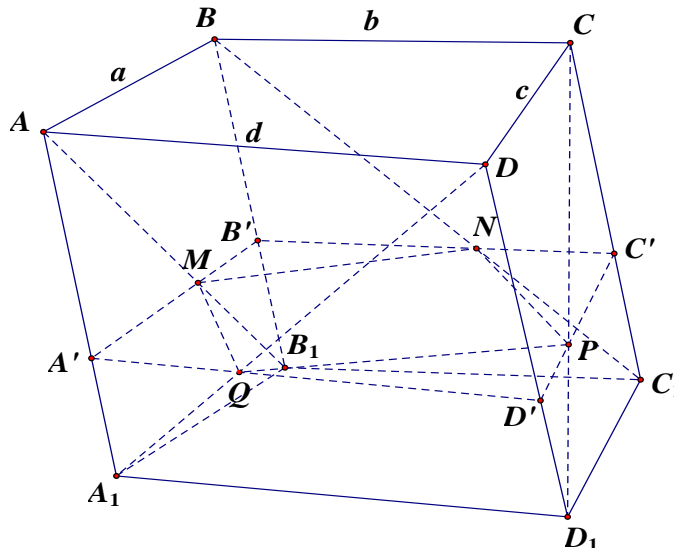
Trong mp(SAC) vẽ AE, CF song song với MP cắt SO tại E, F. Khi đó $\frac{SA}{SM} = \frac{SE}{SG}, \frac{SC}{SP} = \frac{SF}{SG}$

Cộng các vế ta được $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SO + OE + SO - OF}{SG} = 2\frac{SO}{SG}$ (Vì AECF là hình bình hành). Tương

tự ta cũng có tổng: $\frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} = 2\frac{SO}{SG}$ suy ra $x + y = 2 + 3 = 5$.

Khi đó ta xét $T = x^2 + 4(5 - x)^2 = 5x^2 - 40x + 100 = 5(x - 4)^2 + 20 \geq 20 \Rightarrow \min T = 20 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu V. 2. Cho hình lăng trụ ABCD.A₁B₁C₁D₁. Một mặt phẳng (α) thay đổi và luôn song song với đáy cắt các đoạn AB₁, BC₁, CD₁, DA₁ lần lượt tại M, N, P, Q. Hãy xác định vị trí của mp(α) sao cho diện tích MNPQ nhỏ nhất.



Để thấy thiết diện $A'B'C'D'$ có diện tích bằng hai đáy và bằng S . Đặt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, các cạnh bên bằng nhau và bằng 1, tỉ số $\frac{AA'}{AA_1} = AA' = x, 0 < x < 1$. Khi đó ta lần lượt tính được: $A'M = ax$, $A'Q = (1 - x)d$ nên tỉ số diện tích $\frac{S_{\Delta A'MQ}}{S_{\Delta ABD}} = x(1 - x)$.

Tương tự tỉ số diện tích $\frac{S_{\Delta B'MN}}{S_{\Delta ABC}} = x(1 - x)$, $\frac{S_{\Delta C'NP}}{S_{\Delta BCD}} = x(1 - x)$, $\frac{S_{\Delta D'PQ}}{S_{\Delta ACD}} = x(1 - x)$ và do đó cộng các đẳng thức trên ta có $2S = \frac{1}{x(1 - x)}(S_{\Delta A'MQ} + S_{\Delta B'MN} + S_{\Delta C'NP} + S_{\Delta D'PQ}) = \frac{1}{x(1 - x)}(S - S_{MNPQ})$

Đặt $S_{MNPQ} = S'$ thì $S' = S - 2x(1 - x)S$. Vậy để diện tích S' nhỏ nhất thì $2x(1 - x)$ lớn nhất và ta có theo bất Cô si: $2x(1 - x) \leq 2 \cdot \frac{(x + 1 - x)^2}{4} = \frac{1}{2}$ đạt được tại $x = \frac{1}{2}$.

Vậy khi $mp(\alpha)$ đi qua trung điểm cạnh bên và song song với hai đáy thì $S_{MNPQ} = S'$ nhỏ nhất và bằng nửa diện tích đáy.

HẾT.

Người hướng dẫn giải: Nguyễn Xuân Chung – THPT Lê Lai – Ngọc Lặc – Thanh Hóa

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 4 câu)

Câu 1. (5.0 điểm)

a. Cho phương trình
$$\frac{(\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - \sin 2x - \cos 2x + 1}{2 \sin x - \sqrt{2}} = 0.$$

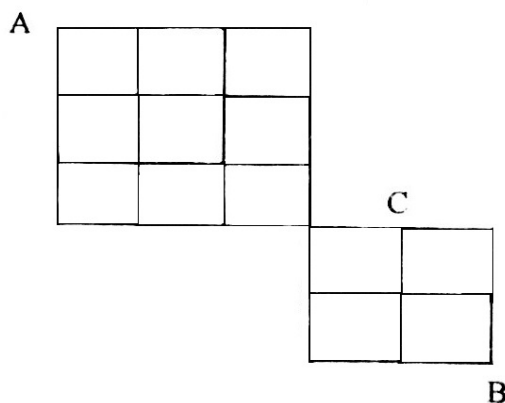
Hỏi phương trình có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(-2018\pi; 2019\pi)$?

b. Tùy theo giá trị của tham số m , tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3 + mx} \right).$

Câu 2. (5.0 điểm)

a. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn C_n^1, C_n^2, C_n^3 lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ 5, thứ 15 của một cấp số cộng. Chứng minh rằng $(C_{2n+1}^0)^2 + (C_{2n+1}^2)^2 + (C_{2n+1}^4)^2 + \dots + (C_{2n+1}^{2n})^2 = \frac{1}{2} C_{46}^{23}.$

b. Cho lưới ô vuông như hình vẽ, có một con kiến di chuyển từ điểm A đến điểm B bằng cách di chuyển trên cạnh để đi qua các điểm nút của lưới (điểm nút là đỉnh của các hình vuông nhỏ), mỗi bước nó di chuyển xuống dưới hoặc di chuyển sang phải để đến điểm nút gần nhất. Biết rằng nếu đến điểm C thì kiến sẽ bị ăn thịt. Giả sử kiến di chuyển một cách ngẫu nhiên và nó không biết tại C sẽ gặp nguy hiểm. Tính xác suất để kiến đến được điểm B.



Câu 3. (5.5 điểm)

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, BC . Biết rằng $SA = SB = SC = SD$ và góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ là 60° .

a. Tính diện tích tam giác SBM theo a .

b. Tính sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Câu 4. (4.5 điểm)

a. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{5u_n + 1} + 1}, \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Đặt $S_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2$. Chứng minh dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

b. Cho tam giác ABC . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt[3]{12 \sqrt{\sin C}}.$

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. Xét phương trình: $\frac{(\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - \sin 2x - \cos 2x + 1}{2 \sin x - \sqrt{2}} = 0 \quad (1)$

$$\text{ĐK } \sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - \sin 2x - \cos 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) + 2 \sin x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x + 2 \sin x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 & (2) \\ \sin 2x + 2 \sin x - 3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{PT (2)} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ đối chiếu điều kiện ta có } x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{PT (3)} \Leftrightarrow \sin 2x + 2 \sin x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \quad (vn)$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$x \in (-2018\pi; 2019\pi) \Leftrightarrow -2018\pi < \frac{5\pi}{4} + k2\pi < 2019\pi \Leftrightarrow -2018 < \frac{5}{4} + 2k < 2019$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-1009, -1008, \dots, 1008\}$ suy ra có 2018 nghiệm.

Câu 1b. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right)$

$$\begin{aligned} \text{Nếu } m = -3 \text{ thì } & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x) - (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 + 1)^2} + x\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 + 1)^2} + x^2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - 2x} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right) = \frac{7}{6}$$

$$\text{Nếu } m < -3 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x) - (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x) + (m + 3)x \right) = +\infty$$

$$\text{Nếu } m > -3 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x) - (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x) + (m + 3)x \right) = -\infty$$

Câu 2a. Theo giả thiết ta có $C_n^2 = C_n^1 + 4d$; $C_n^3 = C_n^1 + 14d \Rightarrow \frac{C_n^2 - C_n^1}{4} = \frac{C_n^3 - C_n^1}{14}$

$$\Leftrightarrow 7(C_n^2 - C_n^1) = 2(C_n^3 - C_n^1) \Leftrightarrow 2C_n^3 - 7C_n^2 + 5C_n^1 = 0$$

$$2 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 7 \frac{n(n-1)}{2} + 5n = 0 \Leftrightarrow 2n^2 - 27n + 55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = \frac{5}{2} (L) \end{cases}$$

Với $n = 11$, thử lại thỏa mãn cấp số cộng

$$\text{Ta cần chứng minh } (C_{23}^0)^2 + (C_{23}^2)^2 + (C_{23}^4)^2 + \dots + (C_{23}^{22})^2 = \frac{1}{2} C_{46}^{23}$$

Ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát $(C_n^0)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^4)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 = \frac{1}{2} C_{2n}^n$ với n lẻ

$$\text{Xét khai triển } (1+x)^{2n} = (1+x)^n (x+1)^n = (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n)$$

Đồng nhất hệ số của x^n của đẳng thức trên ta có

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n \quad (1)$$

$$\text{Do } n \text{ lẻ và } C_n^0 = C_n^n; C_n^1 = C_n^{n-1}; \dots C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}};$$

$$\text{nên } (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = 2 \left((C_n^0)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^4)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 \right)$$

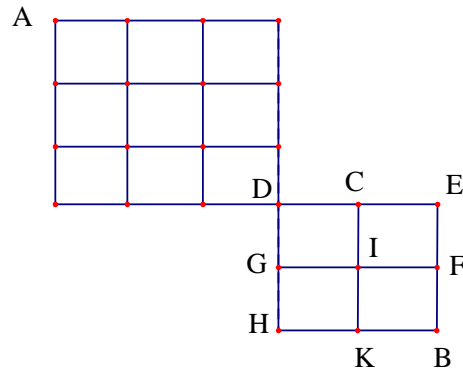
$$\text{Thay vào (1) ta có } (C_n^0)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^4)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 = \frac{1}{2} C_{2n}^n \text{ (đpcm)}$$

Câu 2b Kiến muốn đi đến B thì bắt buộc phải đi qua D

Gọi m là số cách đi từ A đến D

Gọi n là số cách đi từ D đến B

Gọi k là số cách đi từ D đến B mà không đi qua C



Ta có số cách đi từ A đến B là mn ; số cách đi từ A đến B mà không đi qua C là mk .

$$\text{Ta có xác suất mà kiến đi được đến B là } p = \frac{mk}{mn} = \frac{k}{n}$$

Các cách đi từ D đến B mà có đi qua C là: DCEFB; DCIFB; DCIKB; suy ra số cách đi từ D đến B có mà không đi qua C là 3.

Vì tính đối xứng của lưới ô vuông 2×2 nên số cách đi từ D đến B mà không qua C là 3.

$$\text{Suy ra } k = 3, n = 6. \text{ Do đó } p = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$$

Câu 3a Vì $SA = SC$ nên $SO \perp AC$

Vì $SB = SD$ nên $SO \perp BD$

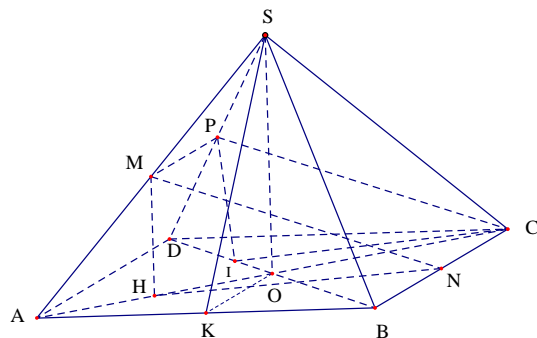
Do đó $SO \perp (ABCD)$

Trong tam giác SAC kẻ

$$MH \perp AC (H \in AC) \Rightarrow MH \parallel SO$$

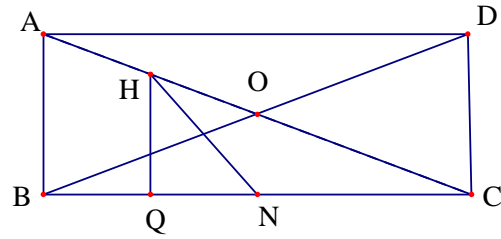
$$\Rightarrow MH \perp (ABCD)$$

Theo giả thiết thì $\widehat{MNH} = 60^\circ$



Ta có: $HQ = \frac{3}{4}a; QN = \frac{a}{2}$

$$NH^2 = HQ^2 + QN^2 = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{16}$$



Suy ra $NH = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

Do đó $MH = NH \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{39}}{4}$, suy ra $SO = 2MH = \frac{a\sqrt{39}}{2}$

Ta có $S_{\Delta SMB} = \frac{1}{2}S_{\Delta SAB} = \frac{1}{4}SK \cdot AB$; $SK = \sqrt{SO^2 + KO^2} = \sqrt{\frac{39a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{43}}{2}$

Suy ra $S_{\Delta SMB} = \frac{1}{4}SK \cdot AB = \frac{a^2\sqrt{43}}{8}$

Câu 3b Gọi P là trung điểm của SD , ta có tứ giác $MPCN$ là hình bình hành suy ra $MN \parallel CP$

Gọi α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) , ta thấy α bằng góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (SBD)

Kẻ $CI \perp BD \Rightarrow CI \perp (SBD) \Rightarrow \alpha = \widehat{CPI}$

Tam giác BCD vuông tại C có CI là đường cao, suy ra

$$\frac{1}{CI^2} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow CI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Ta có $CP = MN = 2NH = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{CI}{CP} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

Câu 4a Xét dãy: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{5u_n+1}+1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n > 0 \forall n$

Ta có $u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{5u_n+1}+1} = \frac{2(\sqrt{5u_n+1}-1)}{5}$

$$\Leftrightarrow 5u_{n+1} + 2 = 2\sqrt{5u_n+1} \Leftrightarrow 25u_{n+1}^2 + 20u_{n+1} + 4 = 20u_n + 4 \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = \frac{4}{5}(u_n - u_{n+1})$$

$$S_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 = u_1^2 + \frac{4}{5}(u_1 - u_n) = \frac{9}{5} - \frac{4}{5}u_n \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh (u_n) là dãy giảm.

Thật vậy có $u_2 = \frac{2(\sqrt{6}-1)}{5} < u_1$, giả sử $u_k > u_{k+1}$, thay vào công thức xác định dãy ta thấy $u_{k+1} > u_{k+2}$.

Vậy (u_n) là dãy giảm, mà $u_n > 0 \forall n$ suy ra tồn tại giới hạn $\lim u_n = l \ (l \geq 0)$

Từ đẳng thức $u_{n+1} = \frac{2(\sqrt{5u_n+1}-1)}{5} \Rightarrow l = \frac{2(\sqrt{5l+1}-1)}{5} \Leftrightarrow 5l+2 = 2\sqrt{5l+1}$

$$\Leftrightarrow 25l^2 + 20l + 4 = 20l + 4 \Leftrightarrow l = 0. \text{ Thay vào (1) ta có } \lim S_n = \frac{9}{5}$$

Câu 4b $P = \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt[4]{12}\sqrt{\sin C}$

Ta có $\left(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B}\right)^2 \leq 2(\sin A + \sin B) = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leq 4\cos\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow P \leq 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}} + 2\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\sqrt{\sin C} \leq 2\sqrt{2\left(\cos\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)}$$

Ta lại có $\left(\cos\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)^2 \leq 2\left(\cos^2\frac{C}{2} + \frac{3}{4}\sin^2 C\right) = 1 + \cos C + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos^2 C$

$$= \frac{8}{3} - \frac{3}{2}\left(\cos C - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{3} \text{ suy ra } \cos\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Do đó $P \leq 2\sqrt{4\frac{\sqrt{6}}{3}} = 4\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

có “=” khi
$$\begin{cases} A = B \\ \cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C \\ \cos C = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \arccos\frac{1}{3} \\ A = B \end{cases}$$

Câu 1 (7,0 điểm).a) Giải phương trình $\cos 2x + 7 \cos x - \sqrt{3}(\sin 2x - 7 \sin x) = 8$.b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{y^2 + 1} - y - 1 \\ x^3 - (3x^2 + 2y^2 - 6)\sqrt{2x^2 - y - 2} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$
Câu 2 (2,0 điểm). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được chọn từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Xác định số phần tử của S . Lấy ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn là số chia hết cho 11 và tổng 4 chữ số của nó cũng chia hết cho 11.**Câu 3 (2,0 điểm).** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB và G là trọng tâm tam giác ACD . Viết phương trình đường thẳng AD , biết rằng $M(1; 2)$ và $G\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.**Câu 4 (5,0 điểm).** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AB \parallel CD$) nội tiếp đường tròn tâm O và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA .a) Chứng minh rằng $MO \perp (ABCD)$.b) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và SC . Chứng minh rằng $\cos \varphi < \frac{BC}{SA}$.**Câu 5 (4,0 điểm).**a) Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = 12$, $\frac{2u_{n+1}}{n^2 + 5n + 6} = \frac{u_n + n^2 - n - 2}{n^2 + n}$ với $n \geq 1$.Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2n^2 + 1}$.b) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc + 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2)(|a - b| + |b - c| + |c - a|).$$

--- Hết ---

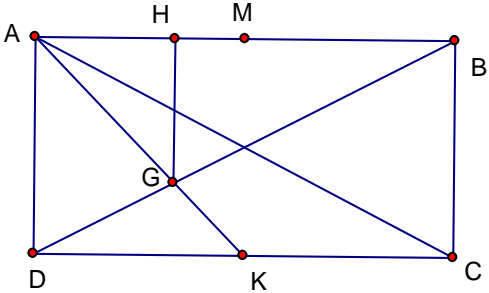
Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

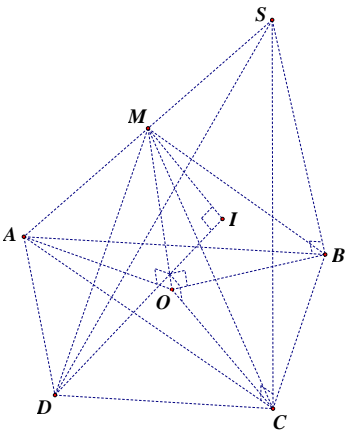
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Môn: TOÁN – BẢNG A

(Hướng dẫn chấm này gồm 06 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1. (7,0đ)	a) (4,0 điểm) Giải phương trình $\cos 2x + 7\cos x - \sqrt{3}(\sin 2x - 7\sin x) = 8. \quad (1)$	
	$(1) \Leftrightarrow (\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x) + 7(\cos x + \sqrt{3}\sin x) = 8$	0,5
	$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 7\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 4 = 0$	1,0
	$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 7\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 4 = 0$	1,0
	$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 7\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 = 0$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 3 \text{ (ptvn)} \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$	0,5
	Vậy phương trình có nghiệm $x = k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$	0,5
	b) (3,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{y^2 + 1} - y - 1 & (1) \\ x^3 - (3x^2 + 2y^2 - 6)\sqrt{2x^2 - y - 2} = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$	
	Điều kiện $2x^2 - y - 2 \geq 0.$	0,5
	$(1) \Leftrightarrow (x+1+y) + \sqrt{(x+1)^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} = 0$	
	$\Leftrightarrow (x+1+y) + \frac{(x+1+y)(x+1-y)}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x+1+y) \left(1 + \frac{x+1-y}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \right) = 0$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+y = 0 \\ 1 + \frac{x+1-y}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = 0 \end{cases}$	

	$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ \sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + (x+1) - y = 0 (*) \end{cases}$ <p>Ta có $\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + (x+1) - y > x+1 + (x+1) + y - y \geq 0$ nên phương trình (*) vô nghiệm.</p>	0,5
	<p>Thay $y = -x - 1$ vào phương trình (2) ta được phương trình</p> $x^3 - (5x^2 + 4x - 4)\sqrt{2x^2 + x - 1} = 0$ $\Leftrightarrow x^3 + [3x^2 - 4(2x^2 + x - 1)]\sqrt{2x^2 + x - 1} = 0 \quad (3)$	0,5
	<p>Đặt $a = \sqrt{2x^2 + x - 1} \geq 0$, phương trình (3) trở thành</p> $x^3 + 3x^2a - 4a^3 = 0 \Leftrightarrow (x - a)(x + 2a)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -2a \end{cases}$	0,5
	$x = a \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x - 1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ $x = -2a \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + x - 1} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 7x^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-2 - 4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y = \frac{-5 + 4\sqrt{2}}{7}$ <p>Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ với $\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ y = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{-2 - 4\sqrt{2}}{7} \\ y = \frac{-5 + 4\sqrt{2}}{7} \end{cases}$.</p>	0,5
2. (2,0đ)	<p>Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được chọn từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Xác định số phần tử của S. Lấy ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chia hết cho 11 và tổng 4 chữ số của nó cũng chia hết cho 11.</p>	
	<p>Số phần tử của S là $A_9^4 = 3024$ (số).</p> <p>Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 3024$</p> <p>Gọi A là biến cố “số được chọn là số chia hết cho 11 và tổng 4 chữ số của nó cũng chia hết cho 11”.</p>	0,5
	<p>Gọi số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau là \overline{abcd} ($a \neq 0, a \neq b \neq c \neq d$)</p> <p>Theo giả thiết ta có $(a+c) - (b+d) : 11$ và $(a+c) + (b+d) : 11$</p> <p>Suy ra $(a+c) : 11$ và $(b+d) : 11$.</p>	0,5
	<p>Trong các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có các bộ số gồm hai chữ số mà tổng chia hết cho 11 là $\{2, 9\}; \{3, 8\}; \{4, 7\}; \{5, 6\}$.</p>	0,5
	<p>Chọn cặp số $\{a, c\}$ có 4 khả năng, mỗi khả năng có 2 cách.</p> <p>Khi đó chọn cặp số $\{b, d\}$ còn 3 khả năng, mỗi khả năng có 2 cách.</p> <p>Như vậy $n(A) = 4.2.3.2 = 48$ (số).</p>	0,5

	Xác suất cần tìm là $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{48}{3024} = \frac{1}{63}$.	
3. (2,0đ)	<p>Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB và G là trọng tâm tam giác ACD. Viết phương trình đường thẳng AD, biết rằng $M(1; 2)$ và $G\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.</p>	
		
	<p>Gọi H là hình chiếu vuông góc của G lên AB và K là trung điểm đoạn CD. Đặt $BC = 3a > 0$, suy ra $AB = 6a, GH = 2a, HM = a$. $MG^2 = 4a^2 + a^2 \Leftrightarrow \frac{40}{9} = 5a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{8}{9} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Suy ra $AM = 3a = 2\sqrt{2}, AG = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3}(3a\sqrt{2}) = \frac{8}{3}$.</p>	0,5
	<p>Gọi $A(x, y)$. Khi đó $\begin{cases} AM = 2\sqrt{2} \\ AG = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 + (2-y)^2 = 8 \\ \left(\frac{5}{3}-x\right)^2 + y^2 = \frac{64}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 3 \\ x = 3y - 1 \end{cases}$</p>	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ y = 0 \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 0 \\ x = \frac{19}{5}, y = \frac{8}{5} \end{cases}$	0,5
	<p>+) Nếu $A(-1, 0)$. Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với đường thẳng AM nên phương trình đường thẳng AD là $x + y + 1 = 0$. +) Nếu $A\left(\frac{19}{5}, \frac{8}{5}\right)$. Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với đường thẳng AM nên phương trình đường thẳng AD là $7x - y - 25 = 0$.</p>	0,5
4. (5,0đ)	<p>Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AB // CD$) nội tiếp đường tròn tâm O và $SBA = SCA = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA.</p> <p>a) Chứng minh rằng $MO \perp (ABCD)$.</p> <p>b) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và SC. Chứng minh rằng</p>	

$\cos \varphi < \frac{BC}{SA}$.		
a) (3,0 điểm)		
		
<p>Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng $(ABCD)$</p> <p>Xét các tam giác $\triangle MHA, \triangle MHB, \triangle MHC$ có</p> <p>$\angle MHA = \angle MHB = \angle MHC = 90^\circ$</p>		1,0
<p>MH chung $MA = MB = MC = \frac{1}{2} SA$</p> <p>Suy ra $\triangle MHA = \triangle MHB = \triangle MHC$ nên $HA = HB = HC$</p>		1,0
Do đó $H \equiv O$, vì vậy $MO \perp (ABCD)$.		1,0
b) (2,0 điểm)		
<p>Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và SC là góc giữa hai đường thẳng CD và SC, suy ra $\cos \varphi = \cos \angle SCD = \sqrt{1 - \sin^2 \angle SCD}$ (*)</p>		0,5
<p>Gọi điểm I là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (SCD)</p> <p>Ta có $MD = MC = \frac{1}{2} SA$ nên $\triangle SDA$ vuông tại D</p>		0,5
<p>Mặt khác lại có $MS = MD = MC$ suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SCD$. Khi đó $\sin \angle SCD = \frac{SD}{2ID} > \frac{SD}{2MD} = \frac{SD}{SA}$ (vì $\triangle MID$ vuông tại I nên $ID < MD$)</p>		0,5
<p>Từ (*) suy ra</p> $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \angle SCD} < \sqrt{1 - \frac{SD^2}{SA^2}} = \sqrt{\frac{SA^2 - SD^2}{SA^2}} = \sqrt{\frac{AD^2}{SA^2}} = \frac{AD}{SA} = \frac{BC}{SA}$ <p>$\cos \varphi < \frac{BC}{SA}$ (đpcm)</p>		0,5
5. (4,0đ)	<p>a) (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = 12$, $\frac{2u_{n+1}}{n^2 + 5n + 6} = \frac{u_n + n^2 - n - 2}{n^2 + n}$ với $n \geq 1$.</p> <p>Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2n^2 + 1}$.</p>	

	<p>Ta có:</p> $\frac{2u_{n+1}}{n^2+5n+6} = \frac{u_n+n^2-n-2}{n^2+n} \Leftrightarrow \frac{2u_{n+1}}{(n+2)(n+3)} = \frac{u_n}{n(n+1)} + \frac{n-2}{n}$ $\Leftrightarrow \frac{2u_{n+1}}{(n+1)(n+2)^2(n+3)} = \frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)} + \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)}$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{2u_{n+1}}{(n+1)(n+2)^2(n+3)} = \frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}$ $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{(n+1)(n+2)^2(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \right] \quad (*)$	0,5
	<p>Đặt $v_n = \frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}$, từ (*) ta có $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ nên (v_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$, $v_1 = \frac{1}{2}$ suy ra $v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2^n}$</p> $\frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow u_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n} + (n^2+3n+2)$	0,5
	<p>Khi đó</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n} + (n^2+3n+2)}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n(2n^2+1)} + \frac{n^2+3n+2}{2n^2+1} \right]$ <p>Ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n > C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$</p> <p>Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n(2n^2+1)} = 0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n+2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$</p> <p>Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$</p>	0,5
<p>b) (2,0 điểm) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc+32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a^2+b^2+c^2)(a-b + b-c + c-a)$.</p>		
	<p>Ta có</p> $a^3+b^3+c^3-3abc=32 \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=32 \quad (*)$ <p>Đặt $t=a+b+c$, từ (*) suy ra $t=a+b+c > 0$</p>	0,5
	$(*) \Leftrightarrow (a+b+c) \left[3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 \right] = 64$ $\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) = \frac{64}{a+b+c} + (a+b+c)^2 = \frac{64}{t} + t^2$	0,5
	<p>Ta chứng minh</p> $ a-b + b-c + c-a \geq \sqrt{2 \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]} \quad (**)$	0,5

	<p>Thật vậy, vì vai trò a, b, c bình đẳng nên giả sử $a \geq b \geq c$</p> $ a-b + b-c + c-a =(a-b)+(b-c)+(a-c)=2(a-c)$ <p>Ta có $(**) \Leftrightarrow 2(a-c) \geq \sqrt{2[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]}$</p> $\Leftrightarrow (a-c)^2 \geq (a-b)^2+(b-c)^2$ $\Leftrightarrow (a-b+b-c)^2 \geq (a-b)^2+(b-c)^2$ $\Leftrightarrow 2(a-b)(b-c) \geq 0 \text{ luôn đúng}$ <p>Vì vậy</p> $ a-b + b-c + c-a \geq 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} = 2\sqrt{\frac{32}{a+b+c}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{t}}$ $3P = 3(a^2+b^2+c^2)(a-b + b-c + c-a).$	
	$3P \geq \left(\frac{64}{t}+t^2\right)\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{t}} = 8\sqrt{2}\left(\frac{64}{t\sqrt{t}}+t\sqrt{t}\right) \geq 8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{\frac{64}{t\sqrt{t}}} \cdot t\sqrt{t} = 128\sqrt{2}$ <p>Suy ra $P \geq \frac{128\sqrt{2}}{3}$.</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{128\sqrt{2}}{3}$</p> <p>Đạt được khi $a = \frac{4+4\sqrt{2}}{3}, b=c = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ và các hoán vị của a, b, c</p>	0,5

- - - Hết - - -

Ghi chú: Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa

Câu 1. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = (m - 1)x - 2m - 3$ có đồ thị là đường thẳng d . Tìm m để đường thẳng d cắt trục Ox, Oy tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB cân.

Câu 2. (4,5 điểm)

1) Giải phương trình $\frac{4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x - 1 - 2 \cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \cos 3x + 1} = 0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + xy^2 + x = 2y^3 + y \\ (x^3 + 3y + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3y^3 + 5x^2 + 2y + 5 \end{cases}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{(a+2)x}{4} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$.

2) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2019; u_2 = 2020; u_{n+1} = \frac{2u_n + u_{n-1}}{3}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Tính $\lim u_n$.

Câu 4. (2,5 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có tâm I . Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$.

Câu 5. (4,0 điểm)

1) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$ và $SA = SB = SC = SD = 2a$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC và H là hình chiếu vuông góc của K trên SA .

a) Tính độ dài đoạn HK theo a .

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng HK, SO . Mặt phẳng (α) đi động, luôn đi qua I và cắt các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = SA' \cdot SB' \cdot SC' \cdot SD'$.

2) Cho tứ diện đều $ABCD$ có đường cao AH . Mặt phẳng (P) chứa AH cắt ba cạnh BC, CD, BD lần lượt tại M, N, P ; gọi $\alpha; \beta; \gamma$ là góc hợp bởi $AM; AN; AP$ với mặt phẳng (BCD) . Chứng minh rằng $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = 12$.

Câu 6. (3,0 điểm)

1) Cho tam thức $f(x) = x^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt và $b^2 - 2b - 3 > 4c$ thì phương trình $f[f(x)] = x$ có bốn nghiệm phân biệt.

2) Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $(a + b - c)^2 = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{ab}}{a + b} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} + \left(\frac{c}{a + b - c} \right)^2$.

3) Lớp 11 Toán có 34 học sinh tham gia kiểm tra môn Toán để chọn đội tuyển dự thi học sinh giỏi cấp tỉnh. Đề kiểm tra gồm 5 bài toán. Biết rằng mỗi bài toán thì có ít nhất 19 học sinh giải quyết được. Chứng minh rằng có 2 học sinh sao cho mỗi bài toán đều được một trong hai học sinh này giải quyết được.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh : Số báo danh

Câu	Lời giải sơ lược	Điểm
1. (2,0 điểm)		
	Ta có d cắt trục Ox tại điểm $A\left(\frac{2m+3}{m-1}; 0\right)$ (điều kiện $m \neq 1$) d cắt trục Oy tại điểm $B(0; -2m-3)$	0,5
	Khi đó $\triangle OAB$ vuông tại O nên $\triangle OAB$ cân tại $O \Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow \left \frac{2m+3}{m-1}\right = 2m+3 $	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3=0 \\ m-1 =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{3}{2} \\ m=2 \\ m=0 \end{cases}$	0,5
	Với $m = -\frac{3}{2}$ ta có ba điểm A, B, O trùng nhau (Loại). Hai trường hợp còn lại thỏa mãn. Vậy $m = 0; m = 2$ là các giá trị cần tìm.	0,5
	Chú ý: + Học sinh thiếu điều kiện $m \neq 1$ trừ 0,25 điểm. + Nếu học sinh thiếu dấu trị tuyệt đối ở bước 2, mà làm đúng các bước trên và tìm ra được $m = 2$ cho 1,25 điểm. + Nếu học sinh thiếu dấu trị tuyệt đối ở bước 2, mà làm đúng các bước trên và tìm ra được $m = 2; m = -\frac{3}{2}$ cho 1,0 điểm. CÁCH 2: Học sinh có thể giải theo cách ngắn hơn như sau (vẫn cho điểm tối đa) Vì d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $\triangle OAB$ vuông cân tại O nên d có hệ số góc k , với $\begin{cases} k = \tan 45^\circ \\ k = \tan 135^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$ Mặt khác theo giả thiết d có hệ số góc $k = m - 1$. Do đó $\begin{cases} m-1=1 \\ m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=1 \end{cases}$	
2.1 (2,25 điểm)		
	Điều kiện: $\cos 3x > -\frac{1}{2}$	0,25
	Ta có: phương trình đã cho tương đương với $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ $\Leftrightarrow 2 - 2\cos x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 - \sin 2x \Leftrightarrow -2\cos x = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$	0,75
	$\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	0,75

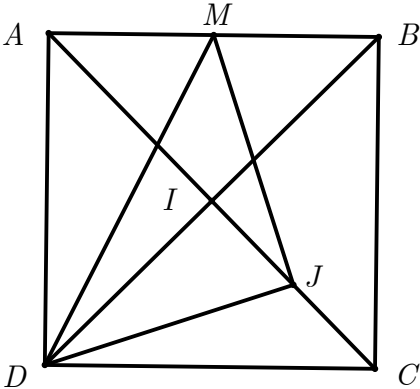
	<p>Với $x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có $\cos 3x = 0 > -\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$)</p> <p>Với $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2}$ (không thỏa mãn điều kiện $(*)$)</p> <p>Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)</p>	0,5
2.2 (2,25 điểm)		
	$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x = 2y^3 + y(1) \\ (x^3 + 3y + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3y^3 + 5x^2 + 2y + 5(2) \end{cases}$ <p>Điều kiện: $2x^2 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{5}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$</p> <p>Ta có phương trình (1) $(x^3 - y^3) + (xy^2 - y^3) + x - y = 0$</p> $(x - y)(x^2 + xy + 2y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + 2y^2 + 1 = 0(*) \end{cases}$	0,5
	<p>Mà $x^2 + xy + 2y^2 + 1 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} + 1 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.</p>	0,25
	<p>Thay $y = x$ vào phương trình (2) ta có</p> $(x^3 + 3x + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5$ $\Leftrightarrow (x^3 + 3x + 5)(\sqrt{2x^2 + 5x} - 1) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5 - (x^3 + 3x + 5)$ $\Leftrightarrow (x^3 + 3x + 5) \cdot \frac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{2x^2 + 5x} + 1} = x \cdot (2x^2 + 5x - 1)$ $\Leftrightarrow (2x^2 + 5x - 1) \left(\frac{x^3 + 3x + 5}{\sqrt{2x^2 + 5x} + 1} - x \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 1 = 0 (3) \\ x^3 + 3x + 5 = x(\sqrt{2x^2 + 5x} + 1) (4) \end{cases}$ $(3) \Leftrightarrow x = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}, \text{ thỏa mãn.}$	1,0
	$(4) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 5 = x\sqrt{2x^2 + 5x} \Rightarrow [x^3 + (2x + 5)]^2 = (x \cdot \sqrt{2x^2 + 5x})^2$ $\Leftrightarrow (x^3)^2 + 2x^3(2x + 5) + (2x + 5)^2 = x^3(2x + 5)$ $\Leftrightarrow (x^3)^2 + x^3(2x + 5) + (2x + 5)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{2x + 5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot (2x + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 2x + 5 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}, \text{ không thỏa mãn.}$ <p>Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm</p> $(x; y) = \left(\frac{-5 + \sqrt{33}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}\right); \left(\frac{-5 - \sqrt{33}}{4}; \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}\right).$	0,5
3.1 (2,0 điểm)		

TXĐ: \mathbb{R} .	0,25
Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x + 1 - x - 3}{(x^2 - 1)(\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x + 1)(\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3})} = \frac{1}{4}$	0,75
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(a + 2)x}{4} = \frac{a + 2}{4} = f(1).$	0,5
Hàm số liên tục tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \frac{a + 2}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = -1$.	0,5

3.2 (2,0 điểm)

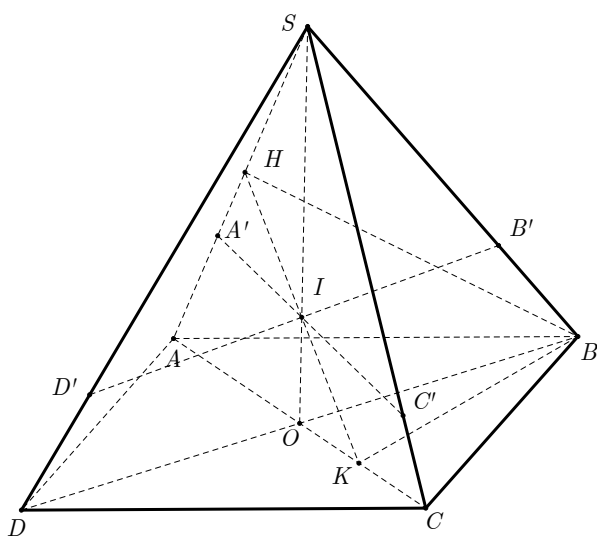
Với $\forall n \geq 2$ ta có $u_{n+1} = \frac{2u_n + u_{n-1}}{3} \Leftrightarrow 3u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1} \Leftrightarrow 3u_{n+1} - 3u_n = -u_n + u_{n-1}$ $\Leftrightarrow (u_{n+1} - u_n) = -\frac{1}{3}(u_n - u_{n-1}).$	0,5
Do đó, dãy (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$ là một cấp số nhân với $v_1 = 1$, công bội $q = -\frac{1}{3}$. Ta có $u_n = u_n - u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-3} + \dots + u_2 - u_1 + u_1 = v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_1 + u_1$ $u_n = v_1 \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + u_1 = 1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{3}} + 2019 = \frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right] + 2019.$	1,0
Vậy $u_n = 2019 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \lim u_n = \frac{8079}{4}$.	0,5

4. (2,5 điểm)

 <p>Gọi a là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$.</p> <p>Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow JD^2 = DI^2 + IJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{5a^2}{8}$</p> <p>$JM^2 = JA^2 + AM^2 - 2JA \cdot AM \cos 45^\circ = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$</p> <p>$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM^2 = DJ^2 + JM^2 \Rightarrow \triangle DMJ$ vuông tại J.</p> <p>Do đó JM vuông góc với JD (1)</p> <p>Chú ý: Học sinh có thể dùng cách vec tơ để chứng minh tính chất vuông góc</p>	0,5
--	-----

D thuộc Δ nên $D(t; t+1) \Rightarrow \overrightarrow{JD}(t-1; t+1), \overrightarrow{JM}(-1; 3)$. Theo (1) $\overrightarrow{JD} \cdot \overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow -t+1+3t+3=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow D(-2; -1)$.	0,25
Dễ thấy $DM = 2\sqrt{5} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \Rightarrow a = 4$. Gọi $A(x; y)$. Vì $\begin{cases} AM = 2 \\ AD = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; y = 3 \\ x = \frac{6}{5}; y = \frac{7}{5} \end{cases}$	0,5
Với $A(-2; 3)$ (thỏa mãn) (vì khi đó A, J cùng phía so với DM). $\Rightarrow B(2; 3) \Rightarrow I(0; 1) \Rightarrow C(2; -1) \Rightarrow J(1; 0)$	0,75
Với $A\left(\frac{6}{5}; \frac{7}{5}\right)$ (loại). (vì khi đó A, J cùng phía so với DM). Vậy tọa độ các đỉnh hình vuông là $A(-2; 3), B(2; 3), C(2; -1), D(-2; -1)$.	0,5

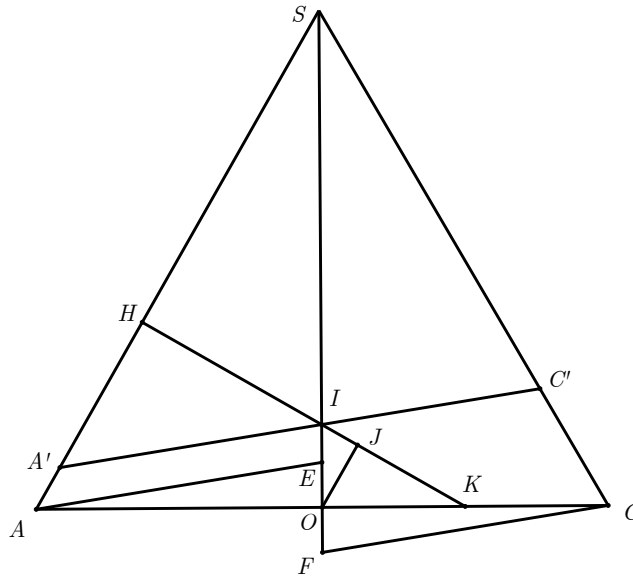
5.1.a) (1,5 điểm)

 <p>Gọi O là giao điểm của AC và BD. Theo giả thiết ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BK$, Mà $BK \perp AC \Rightarrow BK \perp (SAC) \Rightarrow BK \perp SA$ và $BK \perp HK$. Do $\triangle ABC$ vuông đỉnh B nên: $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BK^2 = \frac{3a^2}{4}$. Dễ thấy $SA \perp (BHK) \Rightarrow BH \perp SA$. $\triangle SAB$ cân đỉnh S, BH là đường cao nên dễ thấy $HB = \frac{a\sqrt{39}}{4}$. Do $\triangle HBK$ vuông tại K nên $HK^2 = HB^2 - BK^2 = \frac{27a^2}{16} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$. Chú ý: Nếu học sinh không vẽ điểm K nằm trong đoạn AC thì trừ 0,25 điểm. </p>	0,75
Dễ thấy $SA \perp (BHK) \Rightarrow BH \perp SA$. $\triangle SAB$ cân đỉnh S , BH là đường cao nên dễ thấy $HB = \frac{a\sqrt{39}}{4}$. Do $\triangle HBK$ vuông tại K nên $HK^2 = HB^2 - BK^2 = \frac{27a^2}{16} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$. Chú ý: Nếu học sinh không vẽ điểm K nằm trong đoạn AC thì trừ 0,25 điểm.	0,75

5.2.b) (1,5 điểm)

Ta có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{5a}{4} \Rightarrow HA = \frac{3a}{4}$. Từ O kẻ đường thẳng song song với SA cắt HK tại J . Theo định lý Talet ta có $\frac{OJ}{AH} = \frac{OK}{AK} = \frac{1}{3}$	0,75
---	------

Mà $\frac{AH}{SH} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{OJ}{SH} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{OI}{SI} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{SO}{SI} = \frac{6}{5}$.



Chú ý: Nếu dùng định lý Melenauyt (không chứng minh định lý) để tính tỉ số $\frac{SO}{SI} = \frac{6}{5}$ trừ 0,5 điểm.

Từ A, C lần lượt kẻ các đường thẳng song song với AC cắt SO lần lượt tại E, F.

Khi đó $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SE}{SI} + \frac{SF}{SI} = \frac{SO - OE + SO + OF}{SI} = 2 \frac{SO}{SI} = \frac{12}{5}$

Tương tự ta có $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{24}{5}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{24}{5} \geq 4 \sqrt{\frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} \cdot \frac{SD}{SD'}} \Rightarrow SA' \cdot SB' \cdot SC' \cdot SD' \geq \frac{625}{81} a^4$$

Dấu bằng xảy ra khi $SA' = SB' = SC' = SD' = \frac{5a}{3}$

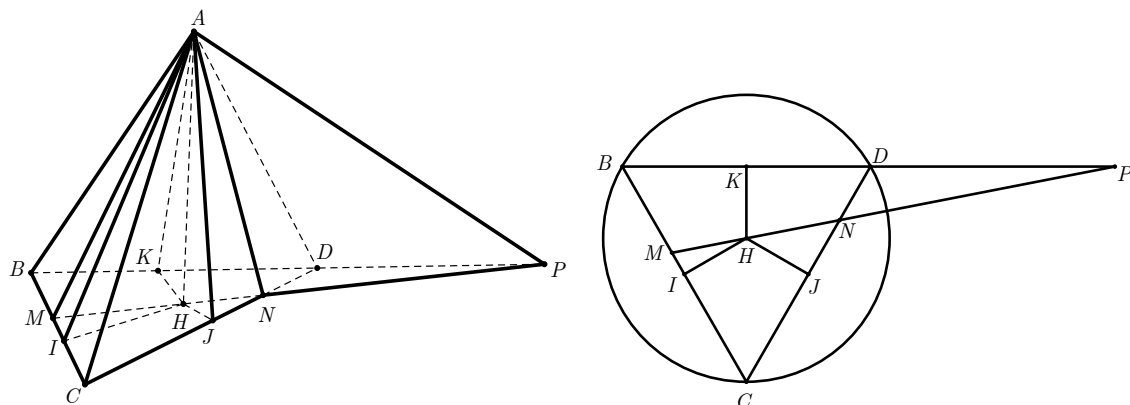
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $SA' \cdot SB' \cdot SC' \cdot SD'$ bằng $\frac{625}{81} a^4$.

5.2 (1,0 điểm)

Gọi a là độ dài cạnh tứ diện ABCD khi đó $AH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Đẳng thức cần chứng minh $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = 12$ (1)

Tương đương với $\frac{1}{MH^2} + \frac{1}{NH^2} + \frac{1}{PH^2} = \frac{18}{a^2}$ (2)



Xét tam giác BCD Từ H kẻ $HI; HJ; HK$ vuông góc với $BC; CD; BD$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử M thuộc đoạn BI và gọi $\phi_1; \phi_2; \phi_3$ lần lượt là ba góc hợp bởi $HM; HN; HP$ với ba cạnh $BC; CD; BD$.

Ta có tam giác HMI và HNJ vuông tại I và J nên tứ giác $HICJ$ nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{IHJ} = 120^\circ \Rightarrow \phi_1 + \phi_3 = 120^\circ$

Mặt khác tổng ba góc của tam giác BMP bằng 180° nên

$$\widehat{BMP} + \widehat{BPM} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow (180^\circ - \phi_1) + \phi_3 + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \phi_1 - \phi_3 = 60^\circ$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{MH^2} + \frac{1}{NH^2} + \frac{1}{PH^2} = \frac{12}{a^2} [\sin^2 \phi_1 + \sin^2 \phi_2 + \sin^2 \phi_3]$$

$$= \frac{12}{a^2} [\sin^2 \phi_1 + \sin^2 (120^\circ - \phi_1) + \sin^2 (\phi_1 + 60^\circ)]$$

$$= \frac{6}{a^2} [1 - \cos 2\phi_1 + 1 - \cos 2(120^\circ - \phi_1) + 1 - \cos 2(\phi_1 + 60^\circ)]$$

$$= \frac{6}{a^2} \left[3 - \cos 2\phi_1 + \frac{1}{2} \cos 2\phi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\phi_1 + \frac{1}{2} \cos 2\phi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\phi_1 \right] = \frac{18}{a^2}$$

$$\text{Vậy } \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = 12$$

0,5

6.1. (1,0 điểm)

Đặt $a = xc, b = yc$ từ điều kiện ta có $(x + y - 1)^2 = xy$ và $P = \frac{\sqrt{xy}}{x + y} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy}$.

$$\text{Ta có } (x + y - 1)^2 = xy \leq \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 \Rightarrow (x + y)^2 - 4[(x + y)^2 - 2(x + y) + 1] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x + y)^2 - 8(x + y) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x + y \leq 2.$$

0,5

Đặt $t = x + y, \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 2 \right)$ thay $xy = (t - 1)^2$ vào biểu thức P ta được

$$P = \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{t^2 - 2(t-1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{-t^2 + 4t - 2} + \frac{1}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{2(t-1)^2} + \frac{1}{-t^2 + 4t - 2} + \frac{1}{2(t-1)^2}$$

0,5

	$\geq \sqrt{\frac{2}{t t-1 }} + \frac{4}{-t^2 + 4t - 2 + 2(t-1)^2} = \sqrt{\frac{2}{t t-1 }} + \frac{4}{t^2} \geq 2, \forall t \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$ <p>Vậy $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.</p>	
6.2. (1,0 điểm)		
	<p>Ta có $f(f(x)) - x = f^2(x) + bf(x) + c - x$</p> $= f(x)[f(x) - x] + x[f(x) - x] + b[f(x) - x] + x^2 + bx + c - x$ $= [f(x) - x][f(x) + x + b + 1].$ <p>Do đó, $f(f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x & (1) \\ x^2 + (b+1)x + b + c + 1 = 0 & (2) \end{cases}$</p>	0,5
	<p>Theo giả thiết, (1) có hai nghiệm phân biệt; do $b^2 - 2b - 3 > 4c$ nên (2) cũng có hai nghiệm phân biệt.</p> <p>Gọi x_0 là nghiệm của (1) ta có $x_0^2 + bx_0 + c = x_0$.</p> <p>Khi đó nếu x_0 là nghiệm của (2) thì</p> $x_0^2 + (b+1)x_0 + b + c + 1 = 0 \Rightarrow 2x_0 + b + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b+1}{2}.$ $\Rightarrow \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 - \frac{b(b+1)}{2} + c = -\frac{b+1}{2} \Rightarrow 4c = b^2 - 2b - 3, \text{ trái giả thiết.}$ <p>Do đó, x_0 không là nghiệm của (2). Vậy phương trình $f(f(x)) = x$ có bốn nghiệm phân biệt.</p>	0,5
6.3. (1,0 điểm)		
	<p>Giả sử ngược lại, tức là với hai học sinh bất kỳ tồn tại ít nhất một bài toán mà cả hai học sinh đó đều không giải được. Bây giờ ta sẽ đếm các bộ ba (x, a, y) trong đó x, y là hai học sinh và a là bài toán mà cả hai học sinh x, y đều không giải quyết được. Gọi k là số tất cả các bộ ba như vậy.</p> <p>Ta có C_{34}^2 cách chọn hai học sinh từ 34 học sinh. Vì hai học sinh bất kỳ thì có ít nhất một bài toán mà cả hai học sinh đều không giải quyết được nên $k \geq C_{34}^2 = 561$ (1)</p>	0,5
	<p>Mặt khác, vì mỗi bài toán a có ít nhất là 19 học sinh giải được nên mỗi bài toán có nhiều nhất là 15 học sinh không giải được. Như vậy, đối với mỗi bài toán a có nhiều nhất C_{15}^2 cặp học sinh không giải được bài toán a.</p> <p>Do đó $k \leq 5 \cdot C_{15}^2 = 525$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) dẫn đến mâu thuẫn.</p> <p>Điều giả sử sai, tức là bài toán được chứng minh.</p>	0,5

- Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được tính điểm tối đa.
- Với các cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho bài hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.
- Điểm toàn bài là tổng số điểm của các phần đã chấm, không làm tròn điểm

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Tính tổng các nghiệm của phương trình sau trên $[0; 1000\pi]$

$$\frac{2\sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 3}{2\cos x - \sqrt{2}} = 0.$$

2. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{\frac{m - \sin x - \cos x - 2\sin x \cos x}{\sin^{2017} x - \cos^{2019} x + \sqrt{2}}}$ xác định với mọi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Một người A đứng tại gốc O của trục số $x'Ox$. Do say rượu nên người A bước ngẫu nhiên sang trái hoặc sang phải trên trục tọa độ với độ dài mỗi bước là 1 đơn vị. Tính xác suất để sau n ($n \geq 2$) bước thì người A quay lại gốc tọa độ O .

2. Cho hình vuông cỡ 9.9 tâm O được tạo từ 9.9 hình vuông đơn vị. Hai hình vuông đơn vị được gọi là kề bên nếu chúng có một cạnh chung. Một con bọ ban đầu ở O . Mỗi lần di chuyển con bọ sẽ nhảy ngẫu nhiên từ tâm hình vuông đơn vị nó đứng sang tâm hình vuông đơn vị kề bên. Tính xác suất để con bọ sau 4 bước nhảy sẽ quay lại điểm O .

3. Cho hình lập phương tâm O được ghép từ 9.9.9 hình lập phương đơn vị. Hai hình lập phương đơn vị được gọi là kề bên nếu chúng có chung một mặt. Con bọ ban đầu ở tâm O . Mỗi bước nhảy con bọ sẽ nhảy từ tâm khối lập phương đơn vị nó đứng sang tâm khối lập phương đơn vị kề bên. Tính xác suất để con bọ sau 4 bước nhảy sẽ quay lại điểm O .

Câu 3. (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) . Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{3^n}$.

Câu 4. (2,0 điểm) Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^2}$.

Câu 5. (8,0 điểm).

1. Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy hai điểm M, N sao cho $\overline{AM} = k\overline{AC'}$, $\overline{CN} = t\overline{CD'}$ với $t, k \neq 0$. Tính độ dài MN theo a khi MN song song với $B'D$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M là điểm di động trên cạnh BC (M khác với B và C). Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với hai đường thẳng SB, AC . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $mp(\alpha)$. Xác định vị trí của M để thiết diện có diện tích lớn nhất.

3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O cạnh có độ dài bằng 1. Gọi M, P là hai điểm sao cho $\overline{AM} = \frac{3}{4}\overline{AA'}$, $\overline{CP} = \frac{1}{4}\overline{CC'}$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua M và P đồng thời cắt hai cạnh BB', DD' lần lượt tại N và Q . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $MNPQ$.

Hết

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....
Người coi thi số 1:.....Người coi thi số 2:.....

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$.

b) Giải phương trình: $\cos 2x + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

Câu 2 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$. Biết góc $BAC = 90^\circ$ và $a, \sqrt{\frac{2}{3}}b, c$ theo thứ tự tạo thành cấp số nhân. Tính số đo góc B, C .

Câu 3 (1,0 điểm). Cho n là một số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2 + 1)^n(x + 2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Từ 8 chữ số trên lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau sao cho tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:
$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \sqrt[n+1]{u_n^n + \frac{1}{2019^n}} \end{cases}$$
. Tìm công thức số hạng tổng quát và tính $\lim u_n$.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$, $BAD = 60^\circ$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M và I là hai điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MS} = \vec{0}$, $4\overrightarrow{IS} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Mặt phẳng (AMI) cắt SC tại N .

a) Chứng minh đường thẳng SD vuông góc với mặt phẳng (AMI) .

b) Chứng minh $ANI = 90^\circ$; $AMI = 90^\circ$.

c) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMI) và hình chóp $S.ABCD$.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm tam giác BCD , G' là trung điểm của AG . Một mặt phẳng (α) đi qua G' cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại B', C', D' . Tính

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'}.$$

Câu 8 (1,0 điểm). Cho n số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2).$$

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

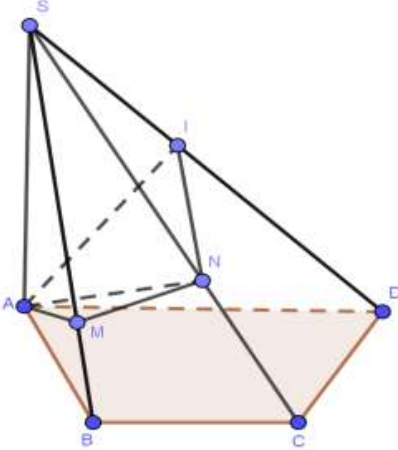
I. LƯU Ý CHUNG:

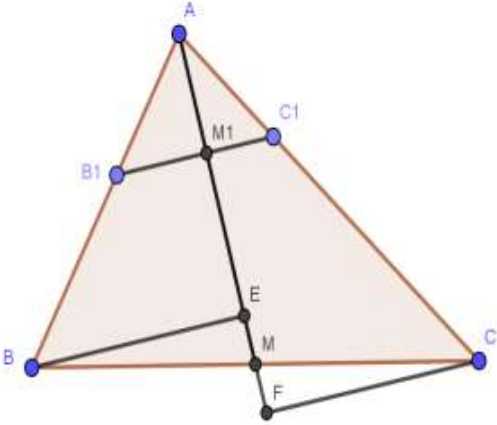
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

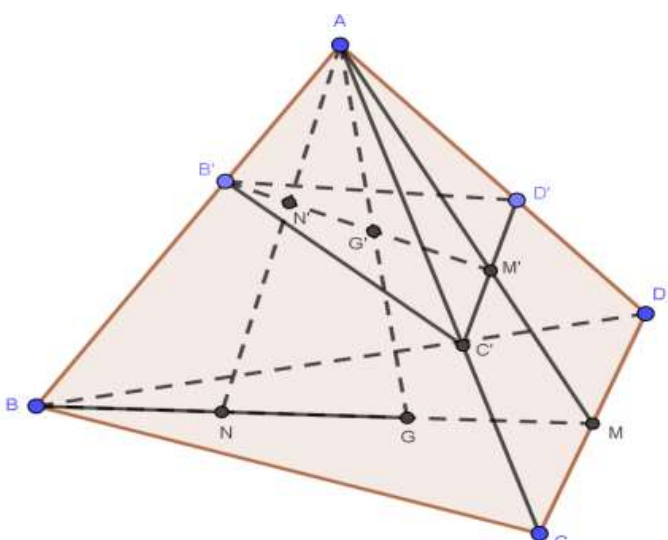
II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	(2,0 điểm)	
	a.(1,0 điểm).	
	Gọi y_0 là một giá trị của hàm số $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$. Khi đó phương trình $y_0 = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$ phải có nghiệm. Ta có phương trình $y_0 = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow (y_0 + 2) \sin x + (1 - 2y_0) \cos x = 4y_0 - 3$ (1)	0,5
	Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi: $(y_0 + 2)^2 + (1 - 2y_0)^2 \geq (4y_0 - 3)^2 \Leftrightarrow 11y_0^2 - 24y_0 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y_0 \leq 2$	0,25
	Vậy $\max y = 2, \min y = \frac{2}{11}$.	0,25
	b.(1,0 điểm)	
	$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$ Phương trình $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$ $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \sin x - \cos x - 1 = 0 \end{cases}$	0,5
	+) Với $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.	0,25
	+) Với $\sin x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = k2\pi$. Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.	0,25
2	(1,0 điểm)	
	Ta có: $\frac{2}{3}b^2 = ac$. Do tam giác ABC vuông ta có	0,25

	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = a \sin B; c = a \sin C = a \cos B.$	
	Suy ra $\frac{2}{3} a^2 \sin^2 B = a^2 \cos B \Leftrightarrow B = 60^\circ$	0,5
	Vậy $A = 90^\circ, B = 60^\circ, C = 30^\circ.$	0,25
3	(1,0 điểm)	
	Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có: $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} \right) \left(\sum_{i=0}^n C_n^i x^i 2^{n-i} \right) = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} \right) \left(\sum_{i=0}^n 2^{n-i} C_n^i x^i \right)$	0,25
	Số hạng chứa x^{3n-3} tương ứng với cặp (k, i) thỏa mãn: $\begin{cases} 2k + i = 3n - 3 \\ 0 \leq k, i \leq n \end{cases} \Rightarrow (k, i) \in \{(n, n-3); (n-1, n-1)\}$ Do đó hệ số của x^{3n-3} là $a_{3n-3} = C_n^n \cdot 2^3 \cdot C_n^{n-3} + C_n^{n-1} \cdot 2^1 \cdot C_n^{n-1} = 8C_n^3 + 2n^2$	0,5
	Theo giả thiết ta có: $8C_n^3 + 2n^2 = 26n \Leftrightarrow 8 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2n^2 = 26n$ $\Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Leftrightarrow n = 5.$ Vậy $n = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
4	(1,0 điểm)	
	Do $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, nên để tổng 4 chữ số đầu và tổng 4 chữ số cuối bằng nhau, điều kiện là tổng đó bằng 14.	0,25
	-Ta lập bộ 4 số có tổng là 14 và có chữ số 0 là: $(0; 1; 6; 7); (0; 2; 5; 7); (0; 3; 4; 7); (0; 3; 5; 6).$ Với mỗi bộ có số 0 trên ứng với một bộ còn lại không có số 0 và có tổng bằng 14.	0,25
	-TH1: Bộ có số 0 đứng trước: Có 4 bộ có chữ số 0, ứng với mỗi bộ có: +) Xếp 4 chữ số đầu có $3.3!$ cách. +) Xếp 4 chữ số cuối có $4!$ cách. Áp dụng qui tắc nhân có $4.3.3!.4! = 1728$ số	0,25
	-TH2: Bộ có số 0 đứng sau: Có 4 bộ có chữ số 0, mỗi bộ có +) Xếp bộ không có chữ số 0 trước có $4!$ cách. +) Xếp bộ có chữ số 0 sau có $4!$ cách. Áp dụng qui tắc nhân có $4.4!.4! = 2304$ số. Vậy có $1728 + 2304 = 4032$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
5	(1,0 điểm)	
	Ta có $u_{n+1}^{n+1} = u_n^n + \frac{1}{2019^n} \Rightarrow u_{n+1}^{n+1} - u_n^n = \frac{1}{2019^n}$ $u_2^2 - u_1^1 = \frac{1}{2019^1}$ Do đó: $u_3^3 - u_2^2 = \frac{1}{2019^2}$ \dots $u_n^n - u_{n-1}^{n-1} = \frac{1}{2019^{n-1}}$	0,25
		0,5

	<p>Suy ra: $u_n^n - u_1^1 = \frac{1}{2019^1} + \frac{1}{2019^2} + \dots + \frac{1}{2019^{n-1}} = \frac{1 - (\frac{1}{2019})^{n-1}}{2018}$</p> <p>Vậy $u_n = \sqrt[n]{2019 + \frac{1 - (\frac{1}{2019})^{n-1}}{2018}}$</p>	
	<p>Ta có</p> $1 < u_n = \sqrt[n]{2019 + \frac{1 - (\frac{1}{2019})^{n-1}}{2018}} < \sqrt[n]{2020} = \sqrt[n]{1.1...1.2020} < \frac{1 + 1 + \dots + 1 + 2020}{n}$ <p>$1 + \frac{2019}{n}$ (Côsi cho $n - 1$ số 1 và số 2020)</p> <p>Mặt khác $\lim(1 + \frac{2019}{n}) = 1$. Vậy $\lim u_n = 1$.</p>	0,25
6	(2,0 điểm)	
a)		0,75
	<p>Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$. Ta có</p> $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}, \vec{a} = a, \vec{b} = 2a, \vec{c} = a\sqrt{3}, \vec{a} \cdot \vec{b} = a^2, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$	0,25
	<p>Ta có: $\overrightarrow{SD} = \vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$.</p>	0,25
	<p>Suy ra: $\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$, $\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Do đó $SD \perp AI$, $SD \perp AM$. Vậy $SD \perp (AMI)$.</p>	0,25
b)		0,5
	<p>Ta có: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{NI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} + \frac{1}{14}\vec{c}$</p> $\Rightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{NI} = 0 \Rightarrow AN \perp NI \Rightarrow \angle ANI = 90^\circ.$	0,25
	<p>$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$, $\overrightarrow{MI} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{9}{28}\vec{c}$</p> $\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Rightarrow AM \perp MI \Rightarrow \angle AMI = 90^\circ.$	0,25
c)		0,75
	<p>Thiết diện tạo bởi mặt phẳng AMI và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $AMNI$. Ta có</p>	0,25

	$S_{AMNI} = S_{ANI} + S_{AMN}$	
	<p>Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AN = \frac{a\sqrt{6}}{2}, NI = \frac{a\sqrt{42}}{14}$</p> <p>$\Rightarrow S_{ANI} = \frac{1}{2}AN.NI = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28}$</p>	0,25
	<p>Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{15a^2}{16} \Rightarrow \cos MAN = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}}{AM.AN} = \frac{5}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \sin MAN = \frac{\sqrt{14}}{8}$</p> <p>$\Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}AN.AM.\sin MAN = \frac{3a^2\sqrt{7}}{32}$</p> <p>Vậy $S_{AMNI} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28} + \frac{3a^2\sqrt{7}}{32} = \frac{45a^2\sqrt{7}}{224}$.</p>	0,25
7	(1,0 điểm)	
	<p>Ta có bài toán : « Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Một đường thẳng d bất kỳ cắt AB, AM, AC lần lượt tại B_1, M_1, C_1. Khi đó $\frac{AB}{AB_1} + \frac{AC}{AC_1} = 2\frac{AM}{AM_1}$ »</p>  <p>Thật vậy : Kẻ BE, CF lần lượt song song với B_1C_1</p> <p>Ta có $BE \parallel B_1M_1$ nên $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AE}{AM_1} = \frac{AM - ME}{AM_1}$</p> <p>$CF \parallel C_1M_1$ nên $\frac{AC}{AC_1} = \frac{AF}{AM_1} = \frac{AM + MF}{AM_1}$</p> <p>Mặt khác $\triangle BME = \triangle CMF$ (g - c - g) nên $ME = MF$</p> <p>Do đó $\frac{AB}{AB_1} + \frac{AC}{AC_1} = \frac{AM - ME}{AM_1} + \frac{AM + MF}{AM_1} = 2\frac{AM}{AM_1}$.</p>	0,25
	<p>Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, BG; M', N' là giao điểm của mặt phẳng (α) với AM, AN.</p> <p>Áp dụng bài toán vào tam giác ACD, ta có:</p> $\frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 2\frac{AM}{AM'} \quad (1)$ <p>Áp dụng bài toán vào tam giác ANM, ta có:</p>	0,5

	$\frac{AN}{AN'} + \frac{AM}{AM'} = 2 \frac{AG}{AG'} \Leftrightarrow 2 \frac{AN}{AN'} + 2 \frac{AM}{AM'} = 4 \frac{AG}{AG'} \quad (2)$ <p>Áp dụng bài toán vào tam giác ABG, ta có:</p> $\frac{AB}{AB'} + \frac{AG}{AG'} = 2 \frac{AN}{AN'} \quad (3)$	
	Thay (1), (3) vào (2) ta được: $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 3 \frac{AG}{AG'} = 6.$	0,25
		
8	(1,0 điểm)	
	<p>Xét tam thức</p> $f(x) = x^2 - (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)$ <p>Ta có: $f(1) = 1 - (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)$</p> $= a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + a_3(a_3 - 1) + \dots + a_n(a_n - 1).$	0,25
	<p>Mặt khác $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [0;1]$ nên:</p> $\begin{cases} a_1(a_1 - 1) \leq 0 \\ a_2(a_2 - 1) \leq 0 \\ \dots \\ a_n(a_n - 1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) \leq 0$	0,25
	<p>Mà $f(0) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 \geq 0 \Rightarrow f(1).f(0) \leq 0$</p> <p>Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $[0;1]$</p>	0,25
	<p>Suy ra $\Delta = (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) \geq 0$</p> $\Rightarrow (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)$	0,25

Câu 1. Giải các phương trình sau:

1) $1 + \sqrt{3} \sin 2x = \cos 2x$.

2) $9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x = 8$.

Câu 2. 1) Hoa có 11 bì thư và 7 tem thư khác nhau. Hoa cần gửi thư cho 4 người bạn, mỗi người 1 thư. Hỏi Hoa có bao nhiêu cách chọn ra 4 bì thư và 4 tem thư, sau đó dán mỗi tem thư lên mỗi bì thư để gửi đi?

2) Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 5 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó có 1 phương án trả lời đúng, 3 phương án sai. Tính xác suất để một học sinh làm bài thi trả lời đúng được ít nhất 3 câu hỏi?

Câu 3. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển Niuton của biểu thức $(2+3x)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

Câu 4. 1) Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}$.

2) Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng tam giác đó có 2 góc trong mà số đo không vượt quá 60° .

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$.

1) Gọi E, F, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ABD .

a) Chứng minh $(EFG) // (BCD)$.

b) Tính diện tích tam giác EFG theo diện tích của tam giác BCD .

2) M là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Kẻ qua M đường thẳng $d // AB$.

a) Xác định giao điểm B' của đường thẳng d và mặt phẳng (ACD) .

b) Kẻ qua M các đường thẳng lần lượt song song với AC và AD cắt các mặt phẳng $(ABD), (ABC)$ theo thứ tự tại C', D' . Chứng minh rằng: $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = 1$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}}$.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Giải các phương trình sau:

1) $1 + \sqrt{3} \sin 2x = \cos 2x$

2) $9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x = 8$

Lời giải

1) $1 + \sqrt{3} \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2} = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

2) $9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x = 8 \Leftrightarrow (6 \cos x - 3 \sin 2x) + (\cos 2x + 9 \sin x - 8) = 0$

$$\Leftrightarrow (6 \cos x - 6 \sin x \cos x) + (1 - 2 \sin^2 x + 9 \sin x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos x (1 - \sin x) + (-2 \sin^2 x + 9 \sin x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos x (1 - \sin x) - (2 \sin x - 7)(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(-6 \cos x - 2 \sin x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 6 \cos x + 2 \sin x = 7 (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì có $a^2 + b^2 = 40 < 49 = c^2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

- Câu 2.**
- 1) Hoa có 11 bì thư và 7 tem thư khác nhau. Hoa cần gửi thư cho 4 người bạn, mỗi người 1 thư. Hỏi Hoa có bao nhiêu cách chọn ra 4 bì thư và 4 tem thư, sau đó dán mỗi tem thư lên mỗi bì thư để gửi đi?
 - 2) Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 5 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó có 1 phương án trả lời đúng, 3 phương án sai. Tính xác suất để một học sinh làm bài thi trả lời đúng được ít nhất 3 câu hỏi?

Lời giải

1) Chọn 4 bì thư từ 11 bì thư có C_{11}^4 cách.

Chọn 4 tem thư từ 7 tem thư có C_7^4 cách.

Dán 4 tem thư và 4 bì thư vừa chọn có: $4!$ cách.

Gửi 4 bì thư đã dán 4 tem thư cho 4 người bạn có: $4!$ Cách.

Vậy có tất cả: $C_{11}^4 \cdot C_7^4 \cdot 4! \cdot 4! = 6652800$ cách.

2) Xác suất để một học sinh trả lời đúng 1 câu là $\frac{1}{4}$, trả lời sai 1 câu là $\frac{3}{4}$.

Xác suất để một học sinh trả lời đúng đúng 3 câu là: $C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{1024}$.

Xác suất để một học sinh trả lời đúng đúng 4 câu là: $C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{1024}$.

Xác suất để một học sinh trả lời đúng cả 5 câu là: $C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$.

Vậy xác suất để một học sinh trả lời đúng ít nhất 3 câu là: $\frac{45}{1024} + \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{61}{1024}$.

Câu 3. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển Newton của biểu thức $(2+3x)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

Lời giải

Ta có: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1 \Leftrightarrow C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20}$.

Lại có: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$.

Mặt khác: $(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$.

$$\Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2 \cdot 2^{20} \Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2^{21} \Leftrightarrow 2n+1 = 21 \Leftrightarrow n = 10.$$

Xét khai triển Newton $(2+3x)^{10}$, ta có: $(2+3x)^{10} = C_{10}^0 2^{10} + C_{10}^1 2^9 \cdot (3x)^1 + \dots + C_{10}^{10} (3x)^{10}$.

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{10} là: $C_{10}^{10} 3^{10} = 59049$.

Câu 4. 1) Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}$.

2) Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng tam giác đó có 2 góc trong mà số đo không vượt quá 60° .

Giải:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2 + 2 - \sqrt{5-x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{5-x^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) \left(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2 + \sqrt{5-x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2 + \sqrt{5-x^2}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

2) Giả sử độ dài ba cạnh của tam giác ABC lần lượt là $a, b, c > 0$.

Không mất tính chất tổng quát giả sử $0 < a \leq b \leq c$.

Do ba cạnh lập thành cấp số nhân nên ta có $b^2 = ac$.

Áp dụng định lý Cos trong tam giác ta có:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \Leftrightarrow a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B = ac$$

$$\Leftrightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - ac}{2ac} \Leftrightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2}{2ac} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } a^2 + c^2 \geq 2ac \quad \forall a, c \text{ nên } \cos B = \frac{a^2 + c^2}{2ac} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow B \leq 60^\circ.$$

Mà $a \leq b \Rightarrow A \leq B \leq 60^\circ$.

Vậy tam giác ABC có 2 góc có số đo không vượt quá 60° .

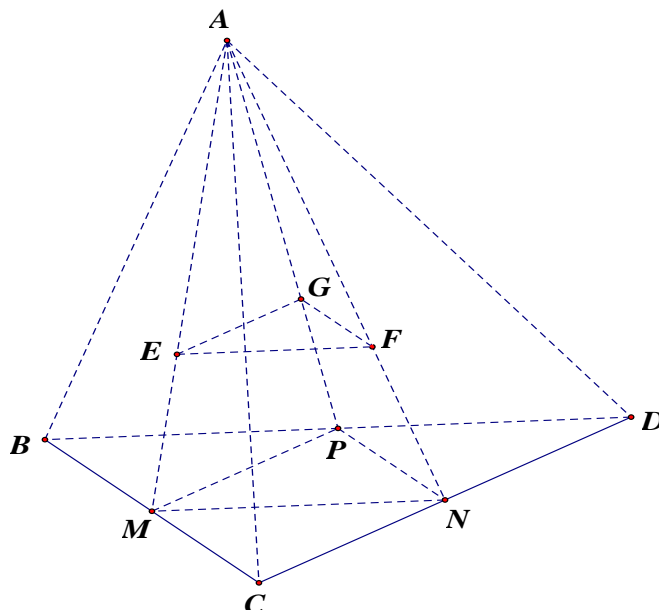
Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$.

1) Gọi E, F, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ABD .

a) Chứng minh $(EFG) // (BCD)$.

b) Tính diện tích tam giác EFG theo diện tích của tam giác BCD .

Lời giải



a) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CD, DB .

Theo tính chất trọng tâm ta có $\frac{SE}{SM} = \frac{SF}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF // MN$.

Mà $MN \subset (BCD)$ nên $EF // (BCD)$ (1).

Chứng minh tương tự ta có $EG // (BCD)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $(EFG) // (BCD)$ (đpcm).

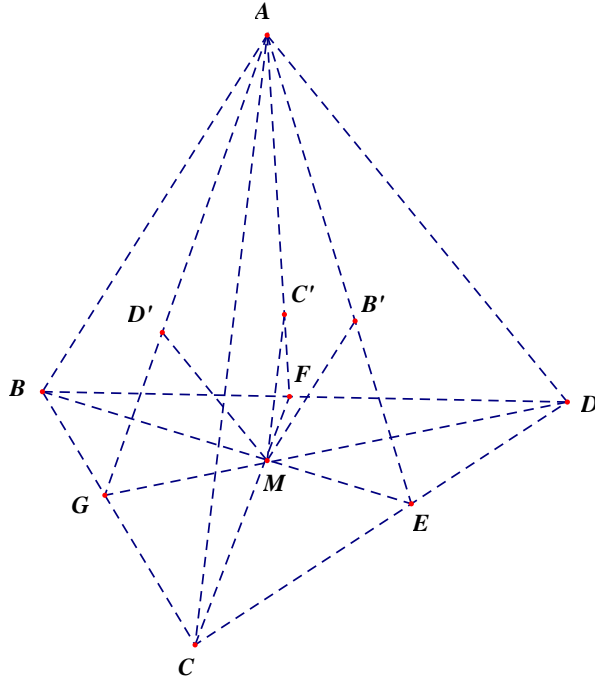
b) Ta có $\frac{EF}{MN} = \frac{SE}{SM} = \frac{EG}{MP} = \frac{2}{3}$ (Theo định lý Talet).

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{\frac{1}{2} EF \cdot EG \sin \angle GEF}{\frac{1}{2} MN \cdot MP \sin \angle NMP} = \frac{EF}{MN} \cdot \frac{EG}{MP} = \frac{4}{9} \quad (3) \quad (\text{Do } (EF; EG) = (MN; MP))$$

$$\text{Mặt khác } \Rightarrow \frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2} MN \cdot MP \sin \angle NMP}{\frac{1}{2} BD \cdot CD \sin \angle BDC} = \frac{MN}{BD} \cdot \frac{MP}{CD} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $\frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{1}{9}$. Vậy $S_{\triangle EFG} = \frac{1}{9} S_{\triangle BCD}$.

2)



a) Trong mặt phẳng (BCD) $BM \cap CD = \{E\}$.

Trong mặt phẳng (ABE) Kẻ $MB' \parallel AB$ ($B' \in AE$) $\Rightarrow d \equiv MB'$

$$\begin{cases} B' \in d \\ B' \in AE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow d \cap (ACD) = \{B'\}$$

b) Trong mặt phẳng (BCD) $CM \cap BD = \{F\}$, $DM \cap BC = \{G\}$

Trong mặt phẳng (ACF) Kẻ $MC' \parallel AC$ ($C' \in AF$)

Trong mặt phẳng (ADG) Kẻ $MD' \parallel AD$ ($D' \in AG$)

$$\text{Ta có: } MB' \parallel AB \Rightarrow \frac{MB'}{AB} = \frac{ME}{BE} = \frac{S_{MCD}}{S_{BCD}} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{MC'}{AC} = \frac{S_{MBD}}{S_{BCD}} \quad (2) ; \frac{MD'}{AD} = \frac{S_{MBC}}{S_{BCD}} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = \frac{S_{MCD} + S_{MBD} + S_{MBC}}{S_{BCD}} = 1$$

$$\text{c) Ta có } \frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MB'.MC'.MD'}{AB.AC.AD}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{MB'.MC'.MD'} \geq \frac{27}{AB.AC.AD}$$

$$T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{AB.AC.AD}{MB'.MC'.MD'}}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{27.AB.AC.AD}{AB.AC.AD}}} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{MB'}{AB} = \frac{MC'}{AC} = \frac{MD'}{AD} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{ME}{BE} = \frac{MF}{CF} = \frac{MD}{DG} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow M$ là trọng tâm ΔBCD .

Câu 1(3,0 điểm). Giải phương trình: $2\cos^5 x \cdot \sin x - 2\sin^5 x \cdot \cos x = \sin^2 4x$.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải phương trình $\frac{x^2}{3-\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + 6$.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho số thực $a \in (0;1)$ và dãy số (u_n) xác định bởi:

$$(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{au_n^3 + a - 1} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Gọi (v_n) là dãy số xác định bởi $v_n = u_n^3 + 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn.

b) Tìm tất cả các giá trị của a biết rằng: $\lim(u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 + n) = 4$.

Câu 4 (3.0 điểm). Danh sách đăng kí dự thi Olympic cấp trường của lớp 11A có 25 học sinh, mỗi em đăng kí dự thi một môn trong số các môn: Toán, Văn, Tin học, Sinh học, Lịch Sử, Vật lí, Hóa học, Anh và Địa Lí. Trong đó có 6 học sinh đăng kí dự thi môn Toán và 5 học sinh đăng kí dự thi môn Anh. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh trong danh sách trên, tính xác suất để trong 3 học sinh đó có cả học sinh đăng kí dự thi môn Toán và học sinh đăng kí dự thi môn Anh.

Câu 5 (6.0 điểm). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Lấy điểm I thuộc cạnh AB , điểm E thuộc cạnh DD' sao cho $AI = D'E = x, (0 < x < 1)$.

a) Chứng minh IE vuông góc với $A'C$.

b) Tìm x để góc giữa hai đường thẳng AC' và DI bằng 60° .

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, A'D'$. Xác định giao điểm K của mặt phẳng (CMN) với đường thẳng $B'C'$ và tính tỉ số $\frac{B'K}{B'C'}$.

Câu 6 (2.0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 3b \leq 0$. Chứng

minh rằng: $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq 1$.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Thầy cô coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:SBD:

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
1 (3 điểm)	$2 \cos^5 x \cdot \sin x - 2 \sin^5 x \cdot \cos x = \sin^2 4x$ $\Leftrightarrow 2 \cos x \cdot \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 4x$ $\Leftrightarrow \sin 2x \cdot \cos 2x = \sin^2 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 4x = \sin^2 4x$	1,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 4x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = k\pi \\ 4x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$	1,5
2 (2 điểm)	<p>Điều kiện xác định: $x \geq 0; x \neq 9$.</p> $\frac{x^2}{3-\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + 6 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3-\sqrt{x}} = x + 2(3-\sqrt{x}) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3-\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{x}{3-\sqrt{x}} + 2.$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3-\sqrt{x}} = 2 \\ \frac{x}{3-\sqrt{x}} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{x} + 6 \\ x = \sqrt{x} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8 - 2\sqrt{7}.$	1,0
3 (4,0 điểm)	a) Ta có $u_{n+1}^3 = au_n^3 + a - 1 \Leftrightarrow u_{n+1}^3 + 1 = a(u_n^3 + 1)$. Suy ra $v_{n+1} = av_n$.	1,0
	Như vậy dãy số (v_n) là cấp số nhân với công bội a nên nó là cấp số nhân lùi vô hạn.	1,0
	<p>b) Ta được $v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{2(1-a^n)}{1-a} \Rightarrow u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 + n = \frac{2(1-a^n)}{1-a}$</p> $\lim(u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 + n) = 4 \Rightarrow \lim \frac{2(1-a^n)}{1-a} = 4$	1,0
	Vì $0 < a < 1$ nên $\lim \frac{2(1-a^n)}{1-a} = \frac{2}{1-a} \Rightarrow \frac{2}{1-a} = 4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.	1,0
4 (3,0 điểm)	<p>T là phép thử ‘Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh trong số 25 học sinh’. Ta có : $\Omega = C_{25}^3$.</p> <p>Gọi A là biến cố : 3 học sinh được chọn luôn có học sinh dự thi môn Toán và học sinh dự thi môn Anh. Ta có các trường hợp sau thuận lợi cho biến cố A :</p>	0,5
	<ul style="list-style-type: none"> Có 1 học sinh chọn môn Toán, 2 học sinh chọn môn Anh có : $C_6^1 \cdot C_5^2$ khả năng Có 2 học sinh chọn môn Toán, 1 học sinh chọn môn Anh có : $C_6^2 \cdot C_5^1$ khả năng Có 1 học sinh chọn môn Toán, 1 học sinh chọn môn Anh, 1 học sinh chọn môn khác (Văn, Tin, Sinh học, Lịch sử, Vật Lí, Hóa, Địa lý) có : $C_6^1 \cdot C_5^1 C_{14}^1$ khả năng. 	2,0
	$ \Omega_A = C_6^1 \cdot C_5^2 + C_6^2 \cdot C_5^1 + C_6^1 \cdot C_5^1 C_{14}^1$. Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{555}{2300} = \frac{111}{460}$.	0,5

<p>5 (6,0 điểm)</p>	<p>Đặt $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{A'D'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{A'A} = \vec{c}$.</p> <p>a) Ta có: $\overrightarrow{A'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.</p> <p>Lại có: $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ $= -x\vec{a} + \vec{b} - (1-x)\vec{c}$.</p> <p>Xét: $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{IE} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-x\vec{a} + \vec{b} - (1-x)\vec{c})$ $= -x\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (1-x)\vec{c}^2 = -x + 1 - (1-x) = 0$.</p> <p>Suy ra $A'C \perp IE$.</p>	<p>3.0</p>
	<p>b) Ta có: $\cos 60^\circ = \frac{ \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} }{ \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} } = \frac{ (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) }{ \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} } = \frac{ -1+x }{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{3}}$.</p> <p>Suy ra: $\frac{ -1+x }{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4 - \sqrt{15}$.</p>	<p>1,5</p>
	<p>c) Gọi M' là trung điểm cạnh $A'B'$.</p> <p>Trong $(A'B'C'D')$: kẻ đường thẳng đi qua N và song song với $C'M'$ cắt đường thẳng $B'C'$ tại K. Khi đó K là giao điểm của mặt phẳng (CMN) với đường thẳng $B'C'$.</p> <p>Áp dụng định lý Ta-lét ta tính được: $\frac{B'K}{B'C'} = \frac{5}{2}$.</p>	<p>1,5</p>
<p>6 (2 điểm)</p>	<p>Đặt $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$.</p> <p>Ta thấy: $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b - 2c + 6 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2 \geq 0$, theo giả thiết thì $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3b$. Suy ra $3b - 2a - 4b - 2c + 6 \geq 0$ hay $2a + b + 2c + 10 \leq 16$.</p> <p>Với hai số $x, y > 0$ ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ (x+y)^2 \geq 4xy \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2)(x+y)^2 \geq 8x^2y^2$.</p> <p>Do đó: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{8}{(x+y)^2}$ (1)</p> <p>Áp dụng (1) ta có:</p> <p>$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} \geq \frac{8}{\left(a + \frac{b}{2} + 2\right)^2}$; $\frac{1}{\left(a + \frac{b}{2} + 2\right)^2} + \frac{1}{(c+3)^2} \geq \frac{8}{\left(a + \frac{b}{2} + c + 5\right)^2}$.</p> <p>$\Rightarrow P \geq \frac{8}{\left(a + \frac{b}{2} + 2\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq 8 \cdot \frac{8}{\left(a + \frac{b}{2} + c + 5\right)^2} = \frac{16^2}{(2a + b + 2c + 10)^2}$.</p> <p>Theo giả thiết và chứng minh trên thì $0 < 2a + b + 2c + 10 \leq 16 \Rightarrow P \geq 1$.</p> <p>Khi $a = 1, b = 2, c = 1$ thì $P = 1$.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

Học sinh làm theo cách khác, nếu đúng vẫn được đủ điểm tối đa như đáp án qui định.

.....Hết.....

Sở giáo dục và đào tạo Hà Nội

Trường Phùng Khắc Khoan

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG

Môn : Toán- Khối: 11 Năm học 2018-2019

Thời gian: 150 phút (Đề có 01 trang)

=====

Câu 1 (4 điểm)

- 1 - Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + |\cos x + \sin x| = 1$ trên $(0; 2\pi)$.
- 2 - Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$.

Câu 2 (6 điểm)

- 1 - Cho n là số dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$.

Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton $P = \left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x} \right)^n$.

- 2 - Một tổ gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành 3 nhóm đều nhau. Tính xác suất để mỗi nhóm có một nữ.
- 3 - An và Bình thi đấu với nhau một trận bóng bàn có tối đa 5 séc , người nào thắng trước 3 séc sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất An thắng mỗi séc là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất để An thắng chung cuộc .

Câu 3 (4 điểm)

- 1- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(-2;3), A'(1;5)$ và $B(5;-3), B'(7;-2)$. Phép quay tâm $I(x;y)$ biến A thành A' và B thành B' , tính $x+y$.
- 2- Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Một đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) và đoạn AB lần lượt tại C và D . Đường thẳng CD cắt $(O;R)$ tại I . Tính độ dài đoạn AI .

Câu 4 (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC . Các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC cắt các mặt phẳng $(SBC), (SAC), (SAB)$ lần lượt tại A', B', C' .

- a) Chứng minh rằng $\frac{MA'}{SA} = \frac{dt(MBC)}{dt(ABC)}$.
- b) Chứng minh rằng $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$ khi M di động trong tam giác ABC
- c) Tìm vị trí của M trong tam giác ABC để $\frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (2 điểm) Cho a, b, c là ba hằng số và (u_n) là dãy số được xác định bởi công thức:

$u_n = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $a+b+c=0$.

-----HẾT-----

[illegible]

Câu 2	<p>1 - Cho n là số dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$.</p> <p>Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton $P = \left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n$</p>	
2 điểm	<p>Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.</p> <p>Ta có $5C_n^{n-1} = C_n^3 \Leftrightarrow \frac{5.n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \Leftrightarrow \frac{5}{(n-3)!(n-2)(n-1)} = \frac{1}{6.(n-3)!}$</p> $\Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7(TM) \\ n = -4(L) \end{cases}$ <p>Với $n = 7$ ta có $P = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)^7$</p> <p>Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = \frac{(-1)^k}{2^{7-k}} \cdot C_7^k \cdot x^{14-3k}$</p> <p>Suy ra $14 - 3k = 5 \Leftrightarrow k = 3$</p> <p>Vậy số hạng chứa x^5 trong khai triển là $T_4 = -\frac{35}{16}x^5$.</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>

	<p>2 - Một tổ gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành 3 nhóm đều nhau. Tính xác suất để mỗi nhóm có một nữ.</p>	
2 điểm	<p>Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.</p> <p>Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 9 em đưa vào nhóm thứ nhất có số khả năng xảy ra là C_9^3</p> <p>Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 6 em đưa vào nhóm thứ hai có số khả năng xảy ra là C_6^3.</p> <p>Còn 3 em đưa vào nhóm còn lại thì số khả năng xảy ra là 1 cách.</p> <p>Vậy $\Omega = C_9^3 C_6^3 \cdot 1 = 1680$</p> <p>Bước 2: Tìm số kết quả thuận lợi cho A.</p> <p>Phân 3 nữ vào 3 nhóm trên có $3!$ cách.</p> <p>Phân 6 nam vào 3 nhóm theo cách như trên có $C_6^2 C_4^2 \cdot 1$ cách khác nhau.</p> <p>$\Rightarrow \Omega_A = 3! \cdot C_6^2 C_4^2 \cdot 1 = 540$.</p> <p>Bước 3: Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{540}{1680} = \frac{27}{84}$.</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>

	<p>3-An và Bình thi đấu với nhau một trận bóng bàn có 5 séc , người nào thắng trước 3 séc sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất An thắng mỗi séc là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất An thắng chung cuộc</p>	
--	---	--

<p>2 điểm</p>	<p>Giả sử số séc trong trận đấu giữa An và Bình là x. Dễ dàng nhận thấy $3 \leq x \leq 5$. Ta xét các trường hợp: TH1: Trận đấu có 3 séc \Rightarrow An thắng cả 3 séc. Xác suất thắng trong trường hợp này là: $P_1 = 0,4.0,4.0,4 = 0,064$ TH2: Trận đấu có 4 séc \Rightarrow An thua 1 trong 3 séc: 1, 2 hoặc 3 và thắng séc thứ 4. Số cách chọn 1 séc để An thua là: C_3^1 (Chú ý xác suất để An thua trong 1 séc là 0,6.) $\Rightarrow P_2 = C_3^1 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6 = 0,1152$ TH3: Trận đấu có 5 séc \Rightarrow An thua 2 séc và thắng ở séc thứ 5. Số cách chọn 2 trong 4 séc đầu để An thua là C_4^2 cách. $\Rightarrow P_3 = C_4^2 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 = 0,13824$ Như vậy xác suất để An thắng chung cuộc là: $P = P_1 + P_2 + P_3 = 0,31744$</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>
	<p>1-Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-2;3), A'(1;5)$ và $B(5;-3), B'(7;-2)$. Phép quay tâm $I(x;y)$ biến A thành A' và B thành B', tính $x+y$</p>	
<p>2 điểm</p>	<p>$Q_{(O,\alpha)}(A) = A' \Rightarrow IA = IA' \quad (1) \quad Q_{(O,\alpha)}(B) = B' \Rightarrow IB = IB' \quad (2)$</p> <p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(-2-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (5-y)^2} \\ \sqrt{(5-x)^2 + (-3-y)^2} = \sqrt{(7-x)^2 + (-2-y)^2} \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=13 \\ 4x+12y=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{25}{2} \\ y=-\frac{31}{2} \end{cases} \Rightarrow x+y=-3$</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>

	<p>Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Một đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) và đoạn AB lần lượt tại C và D. Đường thẳng CD cắt $(O;R)$ tại I. Tính độ dài đoạn AI.</p>	
<p>2 điểm</p>	<div data-bbox="695 1318 1036 1648" data-label="Image"> </div> <p>Ta có: $V_{\left(C, \frac{R'}{R}\right)}(O) = O' \Leftrightarrow CO' = \frac{R'}{R} CO \quad (1) \quad V_{\left(C, \frac{R'}{R}\right)}(I) = D \Leftrightarrow CD = \frac{R'}{R} CI \quad (2)$</p> <p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{CD'}{CD} = \frac{CO}{CI} \Rightarrow OI \parallel O'D \Rightarrow OI \perp AB \Rightarrow I$ là điểm chính giữa của cung AB.</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>

<p>Câu 4</p>	<p>Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC cắt các mặt phẳng $(SBC), (SAC), (SAB)$ lần lượt tại A', B', C'.</p> <p>a) Chứng minh rằng $\frac{MA'}{SA} = \frac{dt(MBC)}{dt(ABC)}$</p> <p>b) Chứng minh rằng $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$ khi M di động trong tam giác ABC?</p> <p>c) $\frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}$ nhận giá trị lớn nhất. Khi đó vị trí của M trong tam giác ABC là:</p>	
<p>2 điểm</p>	<div data-bbox="597 401 1073 674" data-label="Image"> </div> <p>a) Do $MA' \parallel SA$ nên bốn điểm này nằm trong cùng mặt phẳng. Giả sử E là giao điểm của mặt phẳng này với BC. Khi đó A, M, E thẳng hàng và ta có: $\frac{MA'}{SA} = \frac{ME}{EA} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$.</p> <p>b / Tương tự ta có: $\frac{MB'}{SB} = \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \frac{MC'}{SC} = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$. Vậy $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$. Vậy đáp án đúng là .</p> <p>c) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :</p> $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} \geq 3\sqrt{\frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}} \Rightarrow \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC} \leq \frac{1}{27}$ <p>Đều bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{MA'}{SA} = \frac{MB'}{SB} = \frac{MC'}{SC} \Rightarrow S_{MAC} = S_{MAB} = S_{MBC}$.</p> <p>Điều này chỉ xảy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC. Vậy đáp án đúng là B.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>1,0</p>

Câu 5 (2 điểm)

<p>Cho a, b, c là ba hằng số và (u_n) là dãy số được xác định bởi công thức:</p> $u_n = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$ <p>Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $a+b+c=0$.</p>	<p>2,0 đ</p>
<p>Đặt $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n+1}} = a + b\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + c\sqrt{\frac{n+3}{n+1}} \Rightarrow v_n \rightarrow a+b+c$ khi $n \rightarrow +\infty$</p> <p>Ta có: $u_n = v_n \sqrt{n+1}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p>cho nên: nếu $a+b+c \neq 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n (= \infty) \neq 0$.</p>	<p>0,5</p>
<p>Ngược lại nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a = -b-c$ thì khi $n \rightarrow +\infty$ ta có</p> $u_n = b(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) + c(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = \frac{b}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} + \frac{2c}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} \rightarrow 0$	<p>0,5</p>

Câu I (4,0 điểm).

1. Giải phương trình $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-1$

2. Cho các số $x+5y; 5x+2y; 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $(y-1)^2; xy-1; (x+2)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x, y .

Câu II (5,0 điểm).

1. Tính tổng $S = 2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + 4.3C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n$

2. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau. Tính xác suất để chọn được một số có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

Câu III (5,0 điểm).

1. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1} \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1=2\sqrt{4y-3x} \end{cases}$$

Câu IV (2,0 điểm).

Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(3; 4), B(1; 2), đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x+2y+1=0$, trọng tâm G. Biết diện tích tam giác GAB bằng 3 đơn vị diện tích, hãy tìm tọa độ đỉnh C.

Câu V (4,0 điểm).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn $BC=2a$ đáy bé $AD=a$, $AB=b$. Mặt bên SAD là tam giác đều. M là một điểm di động trên AB, Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với SA, BC.

1. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi $mp(P)$. Thiết diện là hình gì?

2. Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x=AM, (0 < x < b)$. Tìm x theo b để diện tích thiết diện lớn nhất

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh :..... Số báo danh

Họ và tên, chữ ký: Giám thị 1:.....

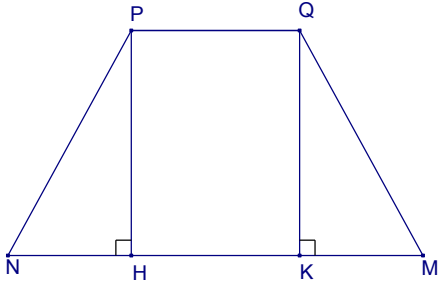
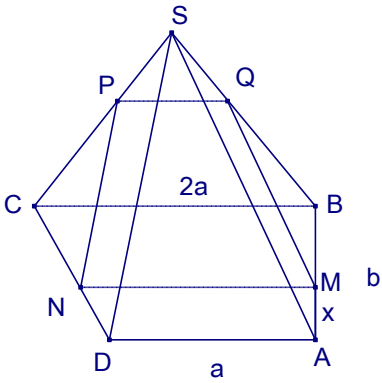
Họ và tên, chữ ký: Giám thị 2:.....

Hướng dẫn chấm

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I.		
1	$2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) + \sqrt{3} \cos 4x = 4 \cos^2 x - 1$	
	PT $1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - 4x \right) + \sqrt{3} \cos 4x = 2(1 + \cos 2x) - 1$ $\Leftrightarrow \sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = 2 \cos 2x$	0.5
	$\Leftrightarrow \cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos 2x$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	1.0
2	<ul style="list-style-type: none"> $x + 5y; 5x + 2y; 8x + y$ theo thứ tự lập thành CSC nên ta có: $x + 5y + 8x + y = 2(5x + 2y)$ $\Leftrightarrow x = 2y$ (1) 	0.5
	<ul style="list-style-type: none"> $(y-1)^2; xy-1; (x+2)^2$ theo thứ tự lập thành CSN nên ta có: $(y-1)^2 (x+2)^2 = (xy-1)^2$ (2) 	0.5
	$(y-1)^2 (2y+2)^2 = (2y^2-1)^2$ <ul style="list-style-type: none"> Thay (1) vào (2) ta đc: $\Leftrightarrow 4(y^4 - 2y^2 + 1) = 4y^4 - 4y^2 + 1$ $\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = -\sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}$ 	1.0
Câu II		
1	$S = 2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + 4.3C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n$	
	Số hạng tổng quát:	1.0

	$u_k = k(k-1)C_n^k = k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}$ $= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!\left[(n-2)! - (k-2)!\right]}$ $= n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \quad (2 \leq k \leq n)$	
	$S = n(n-1)\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \dots + C_{n-2}^{n-2}\right)$	1.0
	$= n(n-1)2^{n-2}$	0.5
2.	Số phần tử của không gian mẫu: $n_\Omega = A_{10}^6 - A_9^5 = 136080$	0.5
	<p>*Số các số tự nhiên có 6 chữ số có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ là TH1: (số tạo thành không chứa số 0)</p> <ul style="list-style-type: none"> Lấy ra 3 số chẵn có: C_4^3 Lấy ra 3 số lẻ có: C_5^3 Số các hoán vị của 6 số trên: $6!$ <p>Suy ra số các số tạo thành: $C_4^3 \cdot C_5^3 \cdot 6! = 28800$</p>	0.5
	<p>TH2: (số tạo thành có số 0)</p> <ul style="list-style-type: none"> Lấy ra hai số chẵn khác 0: C_4^2 Lấy ra 3 số lẻ: C_5^3 Số các hoán vị không có số 0 đứng đầu: $6! - 5! = 5 \cdot 5!$ <p>Số các số tạo thành: $C_4^2 \cdot C_5^3 \cdot 5 \cdot 5! = 36000$</p>	0.5
	<p>Gọi biến cố A: “số được chọn có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ”</p> <p>Suy ra: $n_A = 28800 + 36000 = 64800$</p> <p>Xác suất xảy ra biến cố A: $P_A = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{64800}{136080} = \frac{10}{21}$</p>	1
Câu III		
1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n)}{3n(\sqrt{n^2 + n} + n)}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2}{3\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{2}{3}$	2.0

2	$\begin{cases} x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1} & (1) \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1=2\sqrt{4y-3x} & (2) \end{cases}$	
	Điều kiện: $y \geq 0$	
	$(1) \Leftrightarrow (x-y+4)+\sqrt{x^2+8x+17}-\sqrt{y^2+1}=0$ $\Leftrightarrow (x-y+4)+\frac{(x+4)^2-y^2}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0$	0.5
	$\Leftrightarrow (x-y+4)+\frac{(x+4+y)(x+4-y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0$	
	$\Leftrightarrow (x-y+4)\left(1+\frac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0$ $\Leftrightarrow y=x+4$	0.5
	$\text{Vi: } 1+\frac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=\frac{\sqrt{(x+4)^2+1}+(x+4)+\sqrt{y^2+1}+y}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}>0 \forall x,y$	0.5
	Thay $y=x+4$ vào 2 ta được : $(2) \Leftrightarrow x+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+25}+1=2\sqrt{x+16}$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x+4}-2)+(\sqrt{x+25}-5)+(x+8-2\sqrt{x+16})=0$ $\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}}\right)=0$	0.5
	$\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=4 \\ \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}}=0 \quad (vn) \end{cases}$	0.5
		0.5
Câu IV	Ta có: $\overline{BA}=(2;2), AB=2\sqrt{2}$ Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1} \Leftrightarrow x-y+1=0$	0.5
	$C \in d: x+2y+1=0 \Rightarrow C(-1-2t;t)$ Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra: $G\left(1-\frac{2}{3}t;2+\frac{t}{3}\right)$	0.5
	Khoảng cách từ G đến AB: $d_{(G;AB)}=\frac{ t }{\sqrt{2}}$	0.5
	Vì diện tích GAB bằng 3 đơn vị nên ta có:	0.5

	$\frac{1}{2}d_{(G;AB)} \cdot AB = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow C(-7;3) \\ t = -3 \Rightarrow C(5;-3) \end{cases}$	
Câu V	<p>+ Từ M kẻ đường thẳng song song với BC và SA lần lượt cắt DC tại N, SB tại Q. + Từ Q kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P. Thiết diện hình thang cân MNPQ</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div>	0.5 0.5
	<p>+ Tính diện tích MNPQ</p> <p>Ta tính được $MQ = NP = \frac{b-x}{b}a, PQ = \frac{2 \cdot a \cdot x}{b}; MN = \frac{ab+ax}{b}$ từ đó tính được</p> $QK = \frac{ab - a \cdot x}{b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	1.5
	<p>Suy ra diện tích MNPQ là: $x S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ) \cdot QK = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4b^2} (b-x)(b+3x)$</p>	0.5
	$S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4b^2} (b-x)(b+3x) \leq \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{12b^2} \left(\frac{3b - 3 \cdot x + b + 3 \cdot x}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{12}$ <p>Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{b}{3}$.</p>	1

ĐỀ KIỂM TRA LẦN 1

Số báo danh

.....

Môn thi: TOÁN - Lớp 11 THPT

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu

Câu I (4,0 điểm)

1. Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (*) và đường thẳng $d: y = 2mx - 4$.

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số (*). Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành

độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1 + m}{x_2 - 1} + \frac{x_2 + m}{x_1 - 1} = -6$

2. Giải bất phương trình $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4$.

Câu II (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{4-x+5y} \\ x^2 + y + 2 = \sqrt{5(2x-y+1)} + \sqrt{3x+2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Câu III (4,0 điểm)

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$$

2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2018 \\ (3n^2 + 9n)u_{n+1} = (n^2 + 5n + 4)u_n, n \geq 1 \end{cases}$. Tính giới hạn $\lim \left(\frac{3^n}{n^2} u_n \right)$.

Câu IV (4,0 điểm)

1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} 3x - 6\sqrt{2x+4} = 4\sqrt{3y+18} - 2y \\ 3x + 2y - 6 - 6m = 0 \end{cases}$.

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, có đỉnh $A(-3;1)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = CD$, biết $N(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật ABCD.

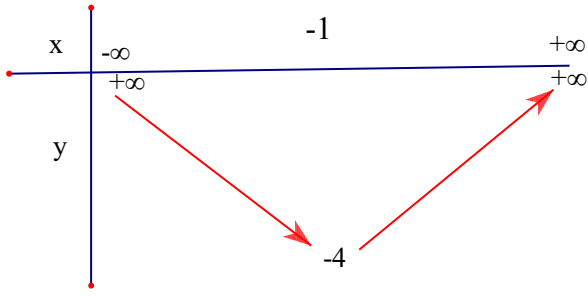
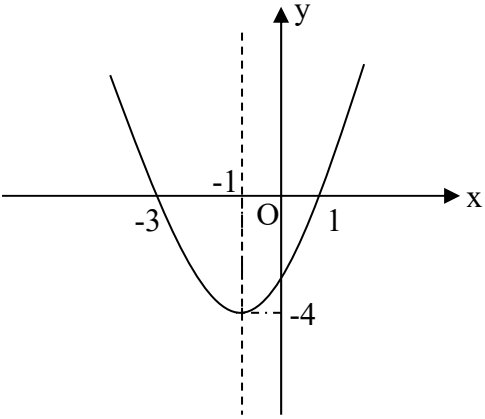
Câu V (4,0 điểm)

1. Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2018}(u_n^2 - u_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim \left(\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} \right)$.

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 25$, đường thẳng AC đi qua điểm $K(2;1)$. Gọi M, N là chân các đường cao kẻ từ đỉnh B và C. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC, biết phương trình đường thẳng MN là $4x - 3y + 10 = 0$ và điểm A có hoành độ âm.

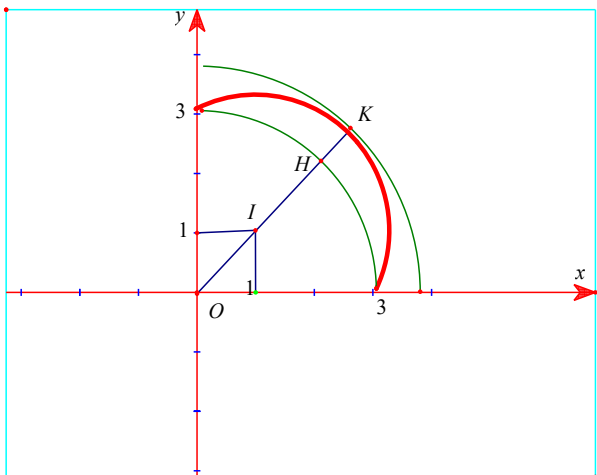
.....Hết.....

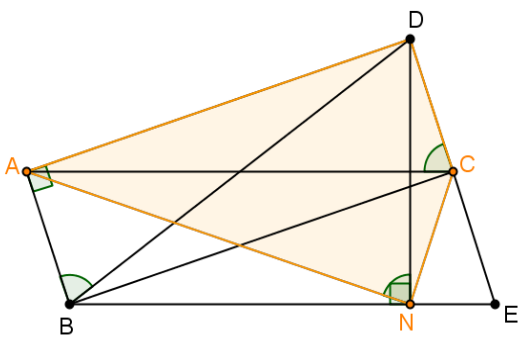
ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM

Câu	NỘI DUNG	Điểm
I 4,0 điểm	<p>1. Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (*) và đường thẳng $d: y = 2mx - 4$. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số (*). Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1 + m}{x_2 - 1} + \frac{x_2 + m}{x_1 - 1} = -6$</p>	2.0
	<p>+ Lập bảng biến thiên và vẽ (P): $y = x^2 + 2x - 3$ ta có đỉnh $I: \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow I(-1; -4)$ Ta có bảng biến thiên:</p> 	0.50
	<p>đồ thị là parabol có bề lõm hướng lên có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$ cắt trục hoành tại điểm $(1; 0); (-3; 0)$ cắt trục tung tại điểm $(0; -3)$ Ta có đồ thị của hàm số:</p> 	0.50
	<p>Đk: $\begin{cases} x_1 \neq 1 \\ x_2 \neq 1 \end{cases}$ Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 2x - 3 = 2mx - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 1 = 0$ (1) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 - 1 > 0 \\ 1 - 2(m-1) + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 4 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$ khi đó theo định lí viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$</p>	0.50
	<p>Ta có $\frac{x_1 + m}{x_2 - 1} + \frac{x_2 + m}{x_1 - 1} = -6 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + (m-1)(x_1 + x_2) - 2m}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = -6$</p>	

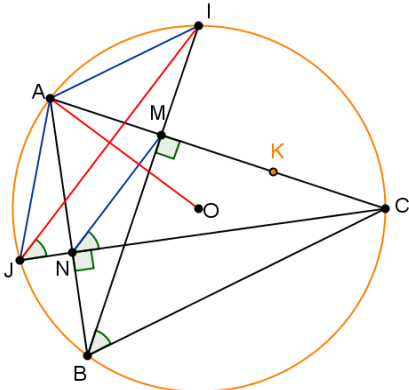
	$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (m-1)(x_1 + x_2) - 2m}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = -6 \Leftrightarrow \frac{4(m-1)^2 - 2 + 2(m-1)^2 - 2m}{1 - 2(m-1) + 1} = -6$ $\Leftrightarrow 6(m-1)^2 - 2m - 2 = -6(4-2m) \Leftrightarrow 3m^2 - 13m + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{7}{3} \end{cases}$ <p>kết hợp với điều kiện ta được $m = \frac{7}{3}$</p>	0.50
	2. Giải bất phương trình $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4$ (*)	2.0
	Điều kiện: $x \geq 1$. Suy ra: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} > 0$.	0.50
	(*) $\Leftrightarrow \frac{4 \cdot (1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}} \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$	0.50
	$\Leftrightarrow 1 + x^2 + 2x - 3 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq x + 3 + x - 1 + 2\sqrt{(x+3)(x-1)}$ $\Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$.	0.50
	Kết luận: Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; +\infty)$.	0.50
II 4,0 điểm	1. Giải phương trình $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$	2.0
	Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$	0.50
	$\text{Pt} \Leftrightarrow \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$ $\Leftrightarrow \frac{\cos x (1 + \sin x + \cos 2x)}{\cos x + \sin x} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$	0.50
	$\Leftrightarrow 1 + \sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1}{2}$ hoặc $\sin x = 1$ (loại).	0.50
	$\text{Với } \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$	0.50
	<p>Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$;</p> <p>$x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ với $(k \in \mathbb{Z})$.</p>	
	2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{4-x+5y} \\ x^2 + y + 2 = \sqrt{5(2x-y+1)} + \sqrt{3x+2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$	2.0

	$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3}, y \geq -1 \\ 4 - x + 5y \geq 0 \\ 2x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ <p>Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :</p> $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{4-x+5y} \Leftrightarrow x+y+2+2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 4-x+5y$	0.50
	$\Leftrightarrow x-2y-1+\sqrt{(x+1)(y+1)}=0 \Leftrightarrow x+1+\sqrt{(x+1)(y+1)}-2(y+1)=0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1})(\sqrt{x+1}+2\sqrt{y+1})=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{y+1} \Leftrightarrow x=y.$	0.50
	<p>Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :</p> $x^2+x+2=\sqrt{5x+5}+\sqrt{3x+2} \Leftrightarrow x^2-x-1+(x+2-\sqrt{5x+5})+(x+1-\sqrt{3x+2})=0$ $\Leftrightarrow x^2-x-1+\frac{x^2-x-1}{\sqrt{5x+5}+x+2}+\frac{x^2-x-1}{\sqrt{3x+2}+x+1}=0$ $\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{5x+5}+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3x+2}+x+2}\right)=0$	0.50
	$\Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ <p>Vì $1+\frac{1}{\sqrt{5x+5}+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3x+2}+x+2} > 0, \forall x \geq -\frac{2}{3}$. Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ : $(x,y)=\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.</p>	0.50
III 4,0 điểm	<p>1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng</p> $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$	2.0
	<p>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b+c}{\sqrt{a}} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{\frac{bc}{a}}$</p> <p>Tương tự ta được $\frac{c+a}{\sqrt{b}} \geq 2\sqrt{\frac{ca}{b}}; \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}}$</p>	0.50
	<p>Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được</p> $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$ <p>Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ca}{b}}} = 2\sqrt{c}$</p>	0.50
	<p>Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \geq 2\sqrt{a}; \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \geq 2\sqrt{b}$</p> <p>Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$</p>	0.50

	Do đó ta suy ra $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$	
	<p>Ta cần chứng minh được</p> $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$ <p>Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy và giả thiết $abc = 1$</p> <p>Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.</p>	0.50
	<p>2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2018 \\ (3n^2 + 9n)u_{n+1} = (n^2 + 5n + 4)u_n, n \geq 1 \end{cases}$</p> <p>Tính giới hạn $\lim \left(\frac{3^n}{n^2} \cdot u_n \right)$.</p>	2.0
	Ta có $u_{n+1} = \frac{1}{3} \frac{(n+1)^2 + 3(n+1)}{n^2 + 3n} u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{(n+1)^2 + 3(n+1)} = \frac{1}{3} \frac{u_n}{n^2 + 3n}$	0.50
	<p>Đặt $v_n = \frac{u_n}{n^2 + 3n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n \Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{3}$ và số hạng đầu</p> $v_1 = \frac{u_1}{4} = \frac{2018}{4} = \frac{1009}{2} \Rightarrow v_n = \frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow u_n = \frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (n^2 + 3n)$	0.50
	Khi đó $\lim \left(\frac{3^n}{n^2} \cdot u_n \right) = \lim \left(\frac{3^n}{n^2} \cdot u_n \right) = \lim \left(\frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (n^2 + 3n) \cdot \frac{3^n}{n^2} \right)$	0.50
	$= \lim \left(\frac{3027}{2} \cdot \frac{n^2 + 3n}{n^2} \right) = \frac{3027}{2} \lim \left(1 + \frac{3}{n} \right) = \frac{3027}{2}$	0.50
IV 4,0 điểm	1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} 3x - 6\sqrt{2x+4} = 4\sqrt{3y+18} - 2y \\ 3x + 2y - 6 - 6m = 0 \end{cases}$	2.0
	<p>Đk: $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -6 \end{cases}$</p>  <p>Ta có pt(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{y}{3} + 2\right) - 2\sqrt{\frac{x}{2} + 1} - 2\sqrt{\frac{y}{3} + 2} = 3 \\ \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{y}{3} + 2\right) = m + 4 \end{cases}$</p>	0.50

<p>Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{\frac{x}{2}} + 1 \\ b = \sqrt{\frac{y}{3}} + 2 \end{cases}$ (đk $a, b \geq 0$). Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 2b = 3 \\ a^2 + b^2 = m + 4 \end{cases} (*)$</p> <p>Hệ phương trình đã cho có nghiệm \Leftrightarrow hệ $(*)$ có nghiệm $a, b \geq 0$ Nếu $m \leq -4$ hệ $(*)$ vô nghiệm \Rightarrow hệ phương trình đã cho vô nghiệm</p>	0.50	
<p>Nếu $m > 4$. Chọn hệ tọa độ Oab ta có</p> <p>Pt(1) cho ta $\frac{1}{4}$ đường tròn (C_1) tâm $I(1;1), R_1 = \sqrt{5}$ (vì $a, b \geq 0$)</p> <p>Pt(2) cho ta $\frac{1}{4}$ đường tròn (C_2) tâm $O(0;0), R_2 = \sqrt{m+4}$ (vì $a, b \geq 0$)</p> <p>Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ cắt (C_2)</p>	0.50	
<p>$\Leftrightarrow OH \leq R_2 \leq OK \Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{m+4} \leq \sqrt{2} + \sqrt{5} \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 3 + 2\sqrt{10}$</p> <p>Vậy hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 5 \leq m \leq 3 + 2\sqrt{10}$</p>	0.50	
<p>2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, có đỉnh $A(-3;1)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = CD$, biết $N(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật ABCD.</p>	2.0	
<p>Tứ giác ADBN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AND} = \widehat{ABD}$ và $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (do ABCD là hình chữ nhật). Suy ra $\widehat{AND} = \widehat{ACD}$ hay tứ giác ANCD nội tiếp được một đường tròn, mà $\widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ANC} = 90^\circ \Rightarrow AN \perp CN$.</p> 	0.50	
<p>Giả sử $C(2c+5; c)$, từ $\overline{AN} \cdot \overline{CN} = 0 \Rightarrow 3(1-2c) + (2+c) = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \boxed{C(7;1)}$</p> <p>Tứ giác ABEC là hình bình hành, suy ra $AC \parallel BE$. Đường thẳng NE qua N và song song với AC nên có phương trình $y + 2 = 0$.</p>	0.50	
<p>Giả sử $B(b; -2)$, ta có $\overline{AB} \cdot \overline{CB} = 0 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \rightarrow B \equiv N \text{ (loại)} \\ b = -2 \rightarrow \boxed{B(-2; -2)} \end{cases}$</p>	0.50	
<p>Từ đó dễ dàng suy ra $\boxed{D(6;4)}$</p>	0.50	

	Vậy $C(7;1)$, $B(-2;-2)$, $D(6;4)$.	
V 4,0 điểm	<p>1. Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2018}(u_n^2 - u_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$</p> <p>Tính $\lim \left(\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} \right)$.</p>	2.0
	<p>Theo giả thiết ta có: $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2018} + u_n$ mà $u_1 = 2$ suy ra.</p> <p>$2 = u_1 < u_2 < u_3 < \dots$ do đó dãy (u_n) là dãy tăng.</p> <p>Giả sử dãy (u_n) bị chặn trên suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ với $(L \geq 2)$ khi đó.</p>	0.50
	<p>$\lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n^2 + 2017u_n}{2018} \Leftrightarrow L = \frac{L^2 + 2017L}{2018} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L = 1 \end{cases}$</p> <p>Vô lý do $L \geq 2$. Suy ra dãy (u_n) không bị chặn trên do đó. $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_n} = 0$</p>	0.50
	<p>Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2018}(u_n^2 - u_n) \Leftrightarrow u_n(u_n - 1) = 2018(u_{n+1} - u_n)$</p> <p>$\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_n(u_n - 1)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} = \frac{2018(u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)}$</p> <p>$= \frac{2018(u_{n+1} - 1 - (u_n - 1))}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} = 2018 \cdot \left[\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right]$</p>	0.50
	<p>Đặt :</p> <p>$S_n = \frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$</p> <p>$\Rightarrow S_n = 2018 \left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = 2018 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) \Rightarrow \lim S_n = 2018$</p>	0.50
	<p>2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$, đường thẳng AC đi qua điểm $K(2;1)$. Gọi M, N là chân các đường cao kẻ từ đỉnh B và C. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC, biết phương trình đường thẳng MN là $4x - 3y + 10 = 0$ và điểm A có hoành độ âm.</p>	2.0
	<p>Gọi I, J lần lượt là giao điểm của BM, CN với đường tròn (C).</p> <p>Do tứ giác BCMN nội tiếp nên $\widehat{MBC} = \widehat{CNM}$, lại có $\widehat{CJI} = \widehat{IBC}$ (cùng chắn cung IC) do đó $\widehat{CJI} = \widehat{CNM} \Rightarrow MN \parallel IJ$</p>	0.50

	<p>Lại có $\begin{cases} \widehat{ACI} = \widehat{ABI} \\ \widehat{JBA} = \widehat{JCA} \\ \widehat{ABI} = \widehat{JCA} (\text{do } \widehat{NBM} = \widehat{NCM}) \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow \widehat{JBA} = \widehat{ICA} \Rightarrow$ $AI = AJ \Rightarrow AO \perp JI \Rightarrow AO \perp MN$</p> 	
	<p>Từ đó ta có:</p> <p>+) Do OA đi qua $O(0;0)$ và vuông góc với $MN : 4x - 3y + 10 = 0$ nên Phương trình đường thẳng $OA : 3x + 4y = 0$.</p> <p>+) Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-4;3) \\ A(4;-3) \text{ (loại)} \end{cases}$</p>	0.50
	<p>+) Do AC đi qua $A(-4;3)$ và $K(2;1)$, nên phương trình đường thẳng $AC : x + 3y - 5 = 0$.</p> <p>Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(-4;3) \equiv A \text{ (loại)} \\ C(5;0) \end{cases}$</p> <p>+) Do M là giao điểm của AC và MN nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x - 3y + 10 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1;2)$</p>	0.50
	<p>+) Đường thẳng BM đi qua $M(-1;2)$ và vuông góc với AC nên phương trình đường thẳng $BM : 3x - y + 5 = 0$</p> <p>Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0;5) \\ B(-3;-4) \end{cases}$</p> <p>Vậy $A(-4;3), B(-3;-4), C(5;0)$ hoặc $A(-4;3), B(0;5), C(5;0)$.</p>	0.50

.....**Hết**.....

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $2(1 + \cos x)(1 + \cot^2 x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: x + 9y = 0$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính giới hạn: $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4}{x^3 - x^2 - x + 1}$

Câu 5 (1,0 điểm). Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu-ton của $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n, x \neq 0$.

Câu 6 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases}$$

Câu 7 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm BC , G là trọng tâm $\triangle ABM$; điểm $D(7; -2)$ nằm trên đoạn MC sao cho $GA = GD$. Viết phương trình đường thẳng AB , biết hoành độ của A nhỏ hơn 4 và AG có phương trình $3x - y - 13 = 0$.

Câu 8 (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$), $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ ($a > 0$). Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc với AC .

- Chứng minh mặt phẳng (SBC) vuông góc mặt phẳng ($ABCD$). Tính độ dài đoạn thẳng SD .
- Mặt phẳng (α) đi qua điểm M thuộc đoạn thẳng OD (M khác O và D) và song song với đường thẳng SD và AC . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) biết $MD = x$. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Câu 9 (1,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 1; u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Tìm công thức số hạng tổng quát } u_n \text{ theo } n.$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

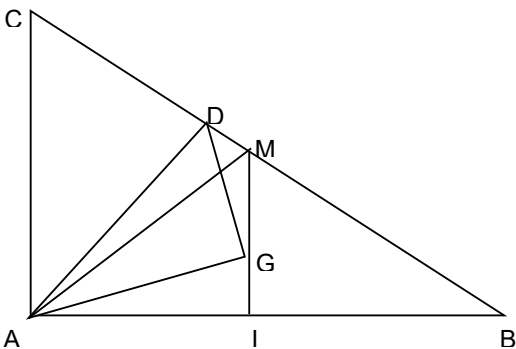
Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	(1,0 điểm)	
	$PT \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = -\frac{3}{2} (L) \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	0,5
2	(1,0 điểm)	
	$ĐK: \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$	0,25
	$Pt \Leftrightarrow 2(1 + \cos x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$	
	$\Leftrightarrow \frac{2}{1 - \cos x} = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x} \Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x + 1 = 0$	0,25
	<p>Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}), -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$, Phương trình trở thành:</p> $t + \frac{t^2 - 1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$	0,25
	<p>Với $t = -1$, ta có $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (tm) \\ x = \pi + k2\pi (l) \end{cases}.$</p> <p>Vậy phương trình có họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$</p>	0,25
3	(1,0 điểm)	
	<p>Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x.$</p> <p>Gọi $M(a; a^3 - 3a^2 + 1) \in (C).$ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là</p> $y = f'(a)(x - a) + a^3 - 3a^2 + 1.$	0,25
	<p>Tiếp tuyến vuông góc với đường $x + 9y = 0$ nên</p>	0,25

	$f'(a) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = -1 \Leftrightarrow 3a^2 - 6a = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}.$	
	Với $a = -1$, phương trình tiếp tuyến là $y = 9x + 6$.	0,25
	Với $a = 3$, phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 26$.	0,25

4.	Ta có : $x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4 = (x-1)^2(x+2)(x^2-2).$ $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1).$	0.5
	$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x^2-2)}{x+1} = -\frac{3}{2}.$ Vậy $I = -\frac{3}{2}.$	0.5
5.	(1,0 điểm)	
	Ta có $5C_n^{n-1} = C_n^3 \Leftrightarrow 5n = \frac{(n-2)(n-1)n}{6} \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ n = -4(ktm) \end{cases}.$	0,25
	Xét khai triển $\left(\frac{7x^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^7 = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k \left(\frac{1}{2}\right)^{7-k} (-1)^k x^{14-2k} x^{-k}$ $= \sum_{k=0}^7 C_7^k \left(\frac{1}{2}\right)^{7-k} (-1)^k x^{14-3k}.$ Ứng với x^8 suy ra $14-3k=8 \Leftrightarrow k=2.$	0,5
	Vậy hệ số của x^8 trong khai triển là: $C_7^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{21}{32}$	0,25

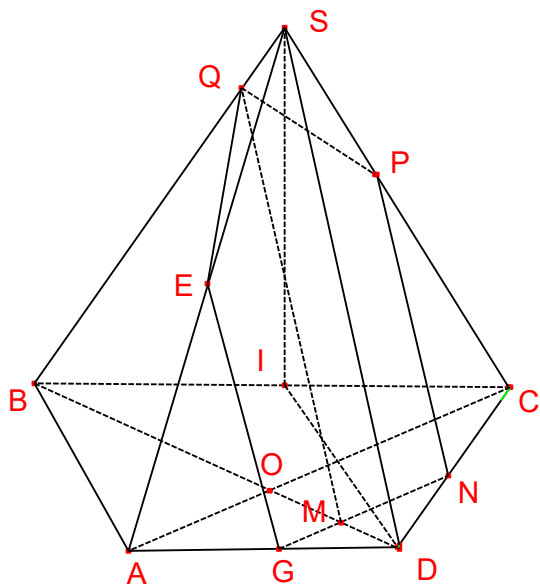
Câu 6 (1,0 điểm)	b)Giải hệ phương trình $\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 & (2) \end{cases}$	
	Điều kiện: $\begin{cases} y \leq \frac{5}{2} \\ x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$ Sau đó đặt $\begin{cases} a = x \\ b = \sqrt{5-2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ y = \frac{5-b^2}{2} \end{cases}$ Phương trình (1) trở thành $8a^3 + 2a - b^3 - b = 0 \Leftrightarrow (2a-b)(4a^2 + 2ab + b^2 + 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b \\ 4a^2 + 2ab + b^2 + 1 = 0 \quad (l) \end{cases}$	0,25

	<p>Với $2a = b \Rightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{5-4x^2}{2} \end{cases}$</p> <p>Thay vào (2) ta có pt $16x^4 - 24x^2 - 3 + 8\sqrt{3-4x} = 0$</p>	0,25
	<p>$\Leftrightarrow 4x^2(4x^2 - 1) - 5(4x^2 - 1) + 8(\sqrt{3-4x} - 1) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow (2x-1)\left(8x^3 + 4x^2 - 10x - 5 - \frac{16}{\sqrt{3-4x}+1}\right) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 8x^3 + 4x^2 - 10x - 5 - \frac{16}{\sqrt{3-4x}+1} = 0 \quad (*) \end{cases}$</p>	0,25
	<p>Ta có $(*) \Leftrightarrow 2x^2(4x-3) + 3x(4x-3) - 2x^2 - x - 5 - \frac{16}{\sqrt{3-4x}+1} = 0$</p> <p>Với $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$ có $2x^2(4x-3) + 3x(4x-3) - 2x^2 - x - 5 - \frac{16}{\sqrt{3-4x}+1} < 0$</p> <p>Vậy $(*)$ không có nghiệm thỏa mãn $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$</p> <p>Kết luận hệ có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$</p>	0,25

	<p>Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm $\triangle ABM$; điểm $D(7; -2)$ nằm trên đoạn MC sao cho $GA = GD$. Viết phương trình đường thẳng AB, biết hoành độ của A nhỏ hơn 4 và AG có phương trình $3x - y - 13 = 0$.</p>	1.0
7	<p>Gọi I là trung điểm AB, dễ thấy $GA = GB = GD \Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD \Rightarrow \angle AGD = 2\angle ABD = 90^\circ \Rightarrow AG \perp DG$</p> 	0.25

	$DG = d(A; AG) = \sqrt{10} \Rightarrow AD = 2\sqrt{5}$ Giả sử $A(a; 3a-13)$, $AD=2\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-7)^2 + (3a-11)^2 = 20 \Leftrightarrow a = 3$ (do $a < 4$) $\Rightarrow A(3; -4)$	0.25
	ΔAMB vuông tại $M \Rightarrow MI = IA = 3IG \Rightarrow AG = \sqrt{10}IG \Rightarrow \cos BAG = \frac{AI}{AG} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ Gọi $\vec{n}(a; b)$ ($a^2 + b^2 > 0$) là véc tơ pháp tuyến của AB , $\vec{n}_1(3; -1)$ là véc tơ pháp tuyến của AG Áp dụng công thức tính góc ta được $\frac{ 3a-b }{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 3a=-4b \end{cases}$	0.25
	Với $b = 0$ thì phương trình AB là $x-3=0$ Với $3a = -4b$ thì $AB: 4x-3y-24=0 \Rightarrow D, G$ nằm về hai phía đối với $AB \Rightarrow G$ nằm ngoài tam giác ABC (loại) Kết luận: Phương trình AB là $x-3=0$. *Chú ý: Nếu học sinh không loại nghiệm thì không cho điểm phần này.	0.25

5 (2 điểm)	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$), $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ ($a > 0$). Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc với AC .	2
-----------------------------	---	----------



8a)

1

Gọi I là trung điểm của BC nên tứ giác ADCI là hình thoi cạnh a nên $IA = IB = IC = a$ thì tam giác ABC vuông tại A, suy ra AC vuông góc DI

0,25

$$AC \perp ID (ID \parallel AB), AC \perp SD \Rightarrow AC \perp (SID) \\ \Rightarrow AC \perp SI$$

0,25

$$\text{Do } AC \perp SI, BC \perp SI \Rightarrow SI \perp (ABCD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SBC)$$

0,25

$$\text{Ta có : } SD = \sqrt{SI^2 + ID^2} = 2a$$

0,25

8b)

1

Từ M kẻ hai đường thẳng lần lượt song song với SD, AC chúng cắt theo thứ tự SB tại Q và AB tại G, AC tại N. Từ G kẻ đường thẳng song song SD, cắt SA tại E, từ N kẻ đường thẳng song song với SD cắt SC tại P. Ta được thiết diện là ngũ giác GNPQE.

0,5

$$\text{Ta có } BD = a\sqrt{3} \text{ nên tính được } EG = NP = 2\left(a - x\sqrt{3}\right), QM = 2\left(a - \frac{x}{\sqrt{3}}\right), GN = 3x$$

0,25

Tứ giác EGMQ và MNPQ là hai hình thang vuông đường cao lần lượt là GM và NM nên

	$S_{MNPQE} = 4x(3a - 2\sqrt{3}x)$	
	$\text{Max } S_{MNPQE} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \text{ tại } x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$	0,25

9 (1 điểm)	Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1; u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n .	
	$u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow nu_n = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{2n-n^2}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ $\Leftrightarrow nu_n = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{(n+1)^2+1-2(n^2+1)}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	0,25
	$\Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{2}[nu_n - \frac{1}{n^2+1}] \quad (1)$	0,25
	Đặt $v_n = nu_n - \frac{1}{n^2+1}$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \quad (v_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow v_n = \frac{1}{2^n})$	0,25
	Vậy $u_n = \frac{1}{n}(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{2^n})$	0,25

(Đề gồm 01 trang)

Câu I. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + m$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ

thị (C) tại điểm M có $x_M = 3$ chắn hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

Câu II. (6,0 điểm)

1) Giải phương trình

$$\sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin x + \cos x - 1$$

2) Tìm số nguyên dương lẻ n sao cho

$$C_n^1 - 2.2C_n^2 + 3.2^2C_n^3 - 4.2^3C_n^4 + \dots + n.2^{n-1}C_n^n = 2019.$$

3) Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2017(2018 - x^2)} - 2017}{x - 1}$

Câu III. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x - 16 + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3}$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ 3\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{2x+4y-8} = x + 2y + 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu IV. (4,0 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 6 = 0$, điểm $M(1;1)$ thuộc cạnh BD biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên cạnh AB, AD đều nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C .

2) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên nửa đường thẳng Ox vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông, ta lấy điểm S sao cho góc $\widehat{SCB} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD .

Câu V. (2,0 điểm) Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 25; c^2 + d^2 = 16$ và $ac + bd \geq 20$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a + d$.

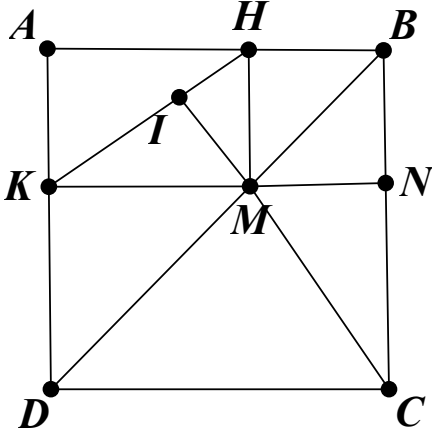
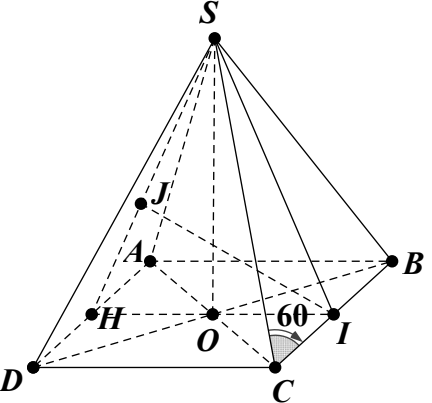
-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Câu	Lời giải sơ lược	Điểm
1(4,0 điểm)		
	<p>Ta có $y' = x^2 - 2x + 1$</p> <p>Theo giả thiết ta có $M(3; 3+m) \in (C)$, phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là: $y = y'(3)(x - 3) + 3 + m \Leftrightarrow y = 4(x - 3) + 3 + m \Leftrightarrow y = 4x - 9 + m \quad (\Delta)$</p>	2,0
	<p>Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(\frac{9-m}{4}; 0\right)$; $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B(0; m-9)$</p> <p>Diện tích tam giác OAB: $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\left \frac{9-m}{4}\right m-9 = \frac{(m-9)^2}{8}$</p> <p>Theo giả thiết: $S_{OAB} = 2 \Rightarrow \frac{(m-9)^2}{8} = 2 \Leftrightarrow (m-9)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13 \\ m = 5 \end{cases}$</p> <p>Vậy $m = 5; m = 13$.</p>	2,0
2.1 (2 điểm) $\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x - 1 \quad (1)$		
	<p>(1) $\sin 2x - \cos 2x = \sin x + \cos x - 1$ $\Leftrightarrow \sin 2x - \sin x = \cos 2x + \cos x - 1$ $\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \sin x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$</p>	0,5
	<p>$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$</p> <p>$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} & (a) \\ \sin x - \cos x = 1 & (b) \end{cases}$</p>	1,0
	<p>(a) $\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$</p> <p>(b) $\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$</p>	0,5
2.2 (2 điểm).		
	<p>Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^nx^n$</p> <p>Lấy đạo hàm 2 vế ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + \dots + C_n^nx^{n-1}$</p>	1,0
	<p>Cho $x = -2 \Rightarrow n(-1)^{n-1} = C_n^1 - 2C_n^22 + 3C_n^32^2 - \dots + nC_n^n(-2)^{n-1}$</p> <p>Vì n lẻ nên ta có: $n = C_n^1 - 2C_n^22 + 3C_n^32^2 - \dots + n2^{n-1}C_n^n = 2019$</p> <p>Vậy $n = 2019$</p>	1,0
2.3 (2 điểm)		
	$+I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2017}(\sqrt{2018-x^2} - \sqrt{2017})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2017}(1-x^2)}{(x-1)(\sqrt{2018-x^2} + \sqrt{2017})}$	1,0

	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{2017}(1+x)}{\sqrt{2018-x^2} + \sqrt{2017}} = \frac{-2\sqrt{2017}}{2\sqrt{2017}} = -1$ <p>Vậy $I = -1$</p>	1,0
3.1 (2 điểm)		
	<p>ĐKXĐ: $x \geq -1$</p> <p>Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$, đk: $t > 0 \Rightarrow t^2 = 3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3}$ $\Rightarrow 3x+2\sqrt{2x^2+5x+3} = t^2 - 4$</p> <p>PT trở thành: $t = t^2 - 4 - 16 \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 5 \end{cases} \Rightarrow t = 5$</p>	1,0
	<p>Với $t = 5 \Rightarrow \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow 3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3} = 25$</p> <p>$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3} = 21-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 21-3x \geq 0 \\ 4(2x^2+5x+3) = 441-126x+9x^2 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x^2-146x+429=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x=143 \vee x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$</p> <p>Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$</p>	1,0
3.2 (2 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 & (1) \\ 3\sqrt{4x+1} + 2\sqrt[3]{2x+4y-8} = x+2y+5 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$		
	<p>Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1/4 \\ 2x+4y-8 \geq 0 \end{cases}$</p>	0,5
	<p>Phương trình (1) tương đương với $(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$ $\Leftrightarrow (x+1-y)[(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 3] = 0$ (*)</p> <p>Vì $(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 3 > 0, \forall x, y$ nên (*) $\Leftrightarrow x+1-y=0 \Leftrightarrow y=x+1$</p>	0,5
	<p>Thay vào phương trình (2) của hệ ta được</p> <p>$3\sqrt{4x+1} + 2\sqrt[3]{6x-4} = 3x+7$ $\Leftrightarrow [3\sqrt{4x+1} - (2x+5)] + [2\sqrt[3]{6x-4} - (x+2)] = 0$ $\Leftrightarrow \frac{-4(x-2)^2}{3\sqrt{4x+1}+2x+5} + \frac{-(x-2)^2(x+10)}{4\sqrt[3]{(6x-4)^2+2(x+2)\sqrt[3]{6x-4}}+(x+2)^2} = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=2(\text{tm}) \Rightarrow y=3(\text{tm}) \\ \frac{-4}{3\sqrt{2x+8}+x+12} + \frac{-(x+10)}{4\sqrt[3]{(6x-4)^2+2(x+2)\sqrt[3]{6x-4}}+(x+2)^2} = 0(**) \end{cases}$</p> <p>Nhận xét: Với $x \geq -1/4$, vế trái của phương trình (**) luôn âm, nên (**) vô nghiệm</p> <p>Vậy hệ phương trình có nghiệm (2;3)</p>	1,0
4.1 (2 điểm)		

	<p>Gọi H và K là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AD; Gọi N là giao điểm của KM và BC, gọi I là giao điểm của CM và HK. Ta có $\triangle DKM$ vuông tại K và $\widehat{MDK} = 45^\circ \Rightarrow KM = KD = NC$.</p> <p>Lại có $MH = MN$ (do MHBN là hình vuông) suy ra $\triangle KMH = \triangle CNM \Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{MCN}$. Mà $\widehat{NMC} = \widehat{IMK}$ nên $\widehat{IMK} + \widehat{HKM} = \widehat{NMC} + \widehat{NCM} = 90^\circ \Rightarrow CI \perp HK$.</p>	1,0
<p>Đường thẳng CI qua M(1;1) và vuông góc với đường thẳng d nên có phương trình: $-(x-1) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$. Do điểm C thuộc đường thẳng CI và đường thẳng Δ nên tọa độ điểm C là nghiệm hệ pt $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$</p> <p>Vậy C(2;2).</p>		1,0
4.2 (2 điểm)		
	<p>Gọi I, H là trung điểm của BC và SD.</p> <p>Ta có SO là trục hình vuông và $\widehat{SCB} = 60^\circ \Rightarrow SA = SB = SC = SD = CB = a$ và $BC \parallel mp(SCD)$ nên $d(BC, SD) = d(I, mp(SAD))$</p> <p>Ta lại có $AD \perp (SIH) \Rightarrow (SIH) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SH. Trong mặt phẳng (SIH) dựng $IJ \perp SH \Rightarrow IJ \perp (SAD) \Rightarrow d(I, (SAD)) = IJ$</p>	1,0
<p>Tam giác SIH có: $IJ = \frac{SO \cdot HI}{SH} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$</p> <p>Vậy $d(BC, SD) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$</p>		1,0
5 (2 điểm) Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 25; c^2 + d^2 = 16$ và $ac + bd \geq 20$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a + d$.		
<p>Từ $a^2 + b^2 = 25; c^2 + d^2 = 16 \Rightarrow$ tồn tại hai góc $\alpha; \beta$ sao cho $\begin{cases} a = 5 \sin \alpha; b = 5 \cos \alpha \\ c = 4 \cos \beta; d = 4 \sin \beta \end{cases}$</p> <p>Khi đó biểu thức $ac + bd \geq 20$ có dạng $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \geq 1$ hay $\sin(\alpha + \beta) \geq 1$, nên $\sin(\alpha + \beta) = 1$ do đó $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy $\sin \beta = \cos \alpha$</p>	1,0	
<p>Ta có $P = 5 \sin \alpha + 4 \sin \beta = 5 \sin \alpha + 4 \cos \alpha \leq \sqrt{41} \Rightarrow P_{\max} = \sqrt{41}$</p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{41}$</p>		1,0

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được tính điểm tối đa.
2. Với các cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho bài hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.
3. Điểm toàn bài là tổng số điểm của các phần đã chấm, không làm tròn điểm

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 5 câu)

Môn thi: **TOÁN LỚP 11**
Thời gian làm bài: **180** phút

Câu 1. (5 điểm)

- a) Giải phương trình $3\tan 2x + 2\cos 2x = \frac{3}{\cos 2x} + 2\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.
- b) Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2017)\sqrt[5]{1-5x} - 2017}{x}$.

Câu 2. (5 điểm)

- a) Năm 2018 là năm kỷ niệm 50 năm Chiến thắng Đồng Lộc (24/7/1968-24/7/2018), trường học X cho học sinh trong các đội tuyển học sinh giỏi Toán khối 10, khối 11 của trường về tham quan khu di tích Ngã ba Đồng lộc. Biết rằng đội tuyển Toán khối 10 có 4 em gồm 2 nam, 2 nữ; đội tuyển Toán khối 11 có 4 em gồm 3 nam, 1 nữ. Trong đợt tham quan thứ nhất, trường chọn 3 học sinh với yêu cầu có cả đội tuyển 10, cả đội tuyển 11; có cả nam và cả nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.
- b) Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $C_{2017}^0 + 3^2 C_{2017}^2 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} = 2^n (2^{n+1} - 1)$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{2016} trong khai triển $(x+2)^n (x^2+x+4)$.

Câu 3. (5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, H là trung điểm của AB , $SH \perp (ABC)$, $SH = x$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của H lên đường thẳng AC và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HN}$.

- a) Khi $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, chứng minh đường thẳng SN vuông góc với mặt phẳng (SAC) .
- b) Tìm x theo a để góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng 45° .

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho $a > 1$ và dãy số (x_n) xác định như sau:

$$x_1 = a; \quad x_{n+1} = \sqrt{a.x_n^2 + 3x_n + 2018} \quad \text{với } n = 1, 2, \dots$$

Tìm a để $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2018$.

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2 y^2 z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{2}|xyz|$.

-----**Hết**-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$a) \quad \text{ĐK} \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x + \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{3 \sin 2x - 3}{\cos 2x} - 2 \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} + 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{3 \sin 2x - 3}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + 2 \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + 2 \cos 2x = 0$$

$$3 \sin 2x - 3 + 2(\cos x - \sin x)^2 + 2 \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow 3 \sin 2x - 3 + 2(1 - \sin 2x) + 2(1 - \sin^2 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 2x + \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1; \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

+) $\sin 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = 0$ không thỏa mãn ĐK

$$+) \sin 2x = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐK)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \quad I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2017)^{\sqrt[5]{1-5x}} - 2017}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^{\sqrt[5]{1-5x}} + \frac{2017(\sqrt[5]{1-5x} - 1)}{x} \right]$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt[5]{1-5x}} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2017(\sqrt[5]{1-5x} - 1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2017(-5x)}{\left(\sqrt[5]{(1-5x)^4} + \sqrt[5]{(1-5x)^3} + \sqrt[5]{(1-5x)^2} + \sqrt[5]{(1-5x)} + 1\right)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5 \cdot 2017}{\left(\sqrt[5]{(1-5x)^4} + \sqrt[5]{(1-5x)^3} + \sqrt[5]{(1-5x)^2} + \sqrt[5]{(1-5x)} + 1\right)} = -2017 \end{aligned}$$

Câu 2. (5 điểm)

a) Ta xét các trường hợp

TH1: 2 học sinh khối 10, 1 học sinh khối 11

KN1: 2 nam khối 10, 1 nữ khối 11 có $C_2^2 \cdot C_1^1 = 1$ cách

KN2: 2 nữ khối 10, 1 nam khối 11 có $C_2^2 \cdot C_1^1 = 3$ cách

KN3: 1 nữ và 1 nam khối 10, 1 học sinh khối 11 có $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 16$ cách

Vậy TH1 có 20 cách chọn

TH2: 2 học sinh khối 11, 1 học sinh khối 10

KN1: 2 nam khối 11, 1 nữ khối 10 có $C_3^2 \cdot C_2^1 = 6$ cách

KN2: 1 nữ và 1 nam khối 11, 1 học sinh khối 10 có $C_3^1 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1 = 12$ cách

Vậy TH2 có 18 cách chọn

Kết hợp hai trường hợp ta thấy có 38 cách chọn

$$b) \quad \text{Ta có } C_{2017}^0 + 3C_{2017}^1 + 3^2 C_{2017}^2 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} + 3^{2017} C_{2017}^{2017} = (1+3)^{2017} = 4^{2017} \quad (1)$$

$$C_{2017}^0 - 3C_{2017}^1 + 3^2 C_{2017}^2 - \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} - 3^{2017} C_{2017}^{2017} = (1-3)^{2017} = -2^{2017} \quad (2)$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta có

$$C_{2017}^0 + 3^2 C_{2017}^2 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} = \frac{1}{2} (4^{2017} - 2^{2017}) = 2^{2016} (2^{2017} - 1)$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } C_{2017}^0 + 3^2 C_{2017}^2 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} = 2^n (2^{n+1} - 1)$$

$$2^n(2^{n+1}-1)=2^{2016}(2^{2017}-1) \text{ hay } n=2016$$

$$(x+2)^n(x^2+x+4)=(x+2)^{n+2}-3x(x+2)^n=(x+2)^{2018}-3x(x+2)^{2016}$$

Xét khai triển $(x+2)^{2018}$, số hạng chứa x^{2016} là $C_{2018}^2 2^2 x^{2016}$

Xét khai triển $(x+2)^{2016}$, số hạng chứa x^{2015} là $C_{2016}^1 2x^{2015}$

Số hạng chứa x^{2016} trong khai triển $(x+2)^n(x^2+x+4)$ là $C_{2018}^2 2^2 x^{2016} - 3C_{2016}^1 2x^{2016}$

Do đó hệ số cần tìm là : $4C_{2018}^2 - 6C_{2016}^1$

Câu 3.

a) Ta có $AC \perp HM, AC \perp SH \Rightarrow AC \perp SN$ (1)

Từ giả thiết ta có H là trung điểm của MN

Gọi K là trung điểm của AC, ta có $HM = \frac{1}{2}BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

do đó ta có $HM = HN = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle NSM$ vuông tại S

suy ra $SM \perp SN$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $SN \perp (SAC)$

b) Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên SM, ta có $HI \perp (SAC)$

Trong mặt (ABI) kẻ đường thẳng qua B, song song với HI cắt AI tại P.

Ta có $BP \perp (SAC)$

Gọi φ là góc giữa SB và (SAC), ta có $\varphi = \angle BSP$.

Tam giác SHM vuông tại H và HI là đường cao nên

$$HI = \frac{SH \cdot HM}{SM} = \frac{\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}} \Rightarrow BP = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}}.$$

$$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\sin \varphi = \frac{BP}{SB} = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^2 + 3a^2)(x^2 + a^2)}}$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^2 + 3a^2)(x^2 + a^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 24a^2x^2 = 4x^4 + 3x^4 + 7x^2a^2$$

$$4x^4 - 17x^2a^2 + 3x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{17 \pm \sqrt{241}}{8}a^2$$

$$\Rightarrow x = a\sqrt{\frac{17 \pm \sqrt{241}}{8}}$$

Câu 4.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n > 0 \forall n$

Vì $x_{n+1} = \sqrt{ax_n^2 + 3x_n + 2018}$ và $a > 1$ nên $x_{n+1} > x_n \forall n$ suy ra (x_n) là dãy số tăng

Giả sử dãy (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow \exists \alpha > 1$ để $\lim x_n = \alpha$. Khi đó:

$$\alpha = \sqrt{a\alpha^2 + 3\alpha + 2018} \Leftrightarrow (a-1)\alpha^2 + 3\alpha + 2018 = 0, \text{ vô lý vì } a > 1$$

Vậy $\lim x_n = +\infty$ (1)

$$\text{Ta có } x_{n+1} = \sqrt{ax_n^2 + 3x_n + 2018} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{a + \frac{3}{x_n} + \frac{2018}{x_n^2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{a}$

Do đó $\sqrt{a} = 2018 \Leftrightarrow a = 2018^2$

Câu 5.

TH1: Nếu có một số bằng 0, giả sử là z , khi đó ta có $x^4 + y^4 = 1$

và $P = x^2 + y^2 \geq \sqrt{x^4 + y^4} = 1$, có “=” khi một số = 0; một số $= \pm 1$.

TH2: Nếu các số đều khác không.

Từ giả thiết suy ra tồn tại ΔABC nhọn sao cho:

$$x^2 = \cos A; \quad y^2 = \cos B; \quad z^2 = \cos C;$$

$$P = \cos A + \cos B + \cos C - \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C} = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow 8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \geq \cos A \cos B \cos C$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{\sin A \sin B \sin C} &\geq \frac{\cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C} \Leftrightarrow \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C \leq \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C &\geq \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức (2) đúng do $\tan A + \tan B \geq 2 \cot \frac{C}{2}$ và hai bất đẳng thức tương tự

Có dấu “=” khi tam giác đều $\Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{2}$.

suy ra $P \geq 1$, có “=” khi hai số = 0; một số $= \pm 1$ hoặc $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{2}$.

Vậy GTNN của P là 1

(Đề thi gồm có 1 trang)

Câu 1 (1 điểm). Giải phương trình

$$\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x - 2 \cos x = 0.$$

Câu 2 (2 điểm).

a) Cho đa giác lồi n cạnh nội tiếp đường tròn, biết số tam giác lập được bằng $\frac{4}{7}$ số tứ giác lập được từ n đỉnh của đa giác đó. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $(3+2x)^n$.

b) Tính tổng $S = \frac{C_n^0}{C_{n+2}^1} + \frac{C_n^1}{C_{n+2}^2} + \frac{C_n^2}{C_{n+2}^3} + \dots + \frac{C_n^n}{C_{n+2}^{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Câu 3 (1 điểm). Cho đồ thị $(C): y = \frac{2mx-1}{2x-2}$ và điểm $M(2;5)$. Đường thẳng d đi qua M và tiếp xúc với (C) . Tìm m để đường thẳng d tạo với 2 tia Ox và Oy tam giác có diện tích lớn nhất.

Câu 4 (1 điểm).

Biết $\lim \left(\sqrt{n^2 + an + 2018} - \sqrt[3]{bn^3 + 6n^2 + 5n + 2019} \right) = 0$. Tính $a^{2018} + b^{2019} - 1$.

Câu 5 (2 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$), $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ ($a > 0$). Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc với AC .

a) Chứng minh mặt phẳng (SBC) vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$. Tính độ dài đoạn thẳng SD .

b) Mặt phẳng (α) đi qua điểm M thuộc đoạn thẳng OD (M khác O và D) và song song với đường thẳng SD và AC . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) biết $MD = x$.
Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Câu 6 (1 điểm). Cho tam giác ABC , điểm K nằm trên cạnh BC sao cho $KB = 2KC$ và $\widehat{KAB} = 2\widehat{KAC}$, điểm $E\left(3; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ là trung điểm cạnh BC , điểm $M\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ là hình chiếu của B lên đường thẳng AK .

Biết rằng A nằm trên đường thẳng $d: y = 5x$ và điểm $I(0;5)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh AC . Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC .

Câu 7 (1 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 7x^2 + 18x + 18 = y^3 - 2y^2 + 3y \\ (x+2)^2 + y^2 - 3y - 9 + 3\sqrt{4x+1} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+x+y-1}(y+\sqrt{4x+1}-3) \end{cases}$$

Câu 8 (1 điểm). Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

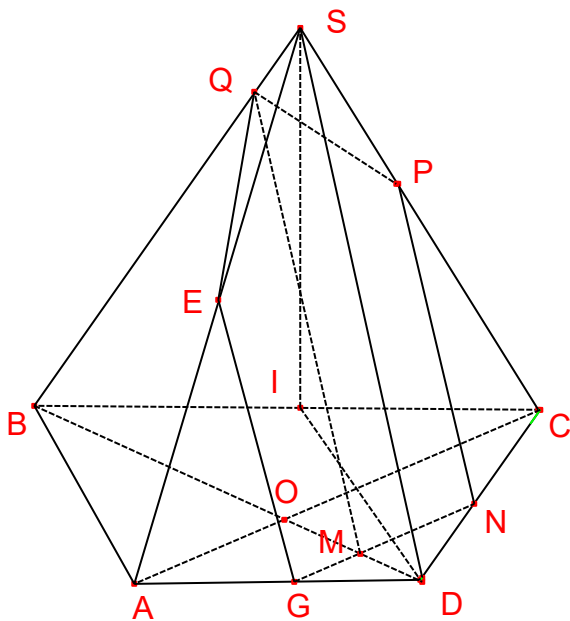
$$\frac{x}{x^2 + x + 1 + yz} + \frac{y}{y^2 + y + 1 + zx} + \frac{z}{z^2 + z + 1 + xy} \leq \frac{3}{4}.$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Đáp án	Điểm
1 (1 điểm)		1
	$\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x - 2 \cos x = 0$ $\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	0,5
2 (2 điểm)	2a)	1
	Từ giả thiết suy ra $C_n^3 = \frac{4}{7}C_n^4 \Leftrightarrow n = 10$	0,5
	Xét $(3+2x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^{10-k} 2^k x^k$ nên ta xét $k = 4$ thu được hệ số của x^4 là $C_{10}^4 3^6 2^4 = 2449440$	0,5
	2b)	1
	Ta có $\frac{C_n^k}{C_{n+2}^{k+1}} = \frac{(k+1)(n-k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(k+1)+1-k^2}{(n+1)(n+2)}$ nên	0,25
	$S = \frac{n(1+2+\dots+n+1)+n+1-(1^2+2^2+\dots+n^2)}{(n+1)(n+2)}$	0,25
	$= \frac{n+3}{6}$	0,5
3 (1 điểm)		1
	Giả sử d: $y = ax + b$. Đường thẳng d cắt 2 tia Ox và Oy lần lượt tại A và B nên $a < 0$. d đi qua M(2;5) nên $b = 5 - 2a$.	0,25
	d tiếp xúc với (C): $y = \frac{2mx-1}{2x-2}$ khi và chỉ khi $2mx-1 = (ax+b)(2x-2)$ có nghiệm kép	0,25

	$x \neq 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} (b-a-m)^2 - 2a(1-2b) = 0 \\ 2m-1 \neq 0 \end{cases}$ <p>Từ trên ta có được</p>	0,5
	$(5-m-3a)^2 = 2a(4a-9) \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 5-3a-\sqrt{2a(4a-9)} \\ m_2 = 5-3a+\sqrt{2a(4a-9)} \end{cases}$ <p>Do $a < 0$ nên m_1 và m_2 là phân biệt vậy ta luôn tìm được giá trị của m với mỗi trường hợp $a < 0$.</p>	0,25
	<p>Ta lại có $S_{OAB} = \frac{1}{2} \frac{b^2}{ a } = \frac{(5-2a)^2}{2 a }$.</p> <p>Chọn $a = \frac{-1}{n} (n \in \mathbb{N})$ thì $S_{OAB} = \frac{1}{2} \frac{(5n+2)^2}{n}$ ta tìm được $m_1 = 5 + \frac{3}{n} + \sqrt{\frac{2(9n+4)}{n^2}}$.</p> <p>Khi $n \rightarrow +\infty$ thì $m_1 \rightarrow 5$ và $S_{OAB} \rightarrow +\infty$ tức ta không tìm được m để thỏa mãn bài toán.</p>	0,25
4 (1 điểm)		1
	<p>Đặt $L = \lim \left(\sqrt{n^2 + an + 2018} - \sqrt[3]{bn^3 + 6n^2 + 5n + 2019} \right)$.</p> <p>Nếu $b \neq 1 \Rightarrow L = \infty$ (loại)</p> <p>Nên $b = 1$</p>	0,5
	<p>Xét $b = 1$ ta có $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 6n^2 + 5n + 2019} - n - 2 \right) = 0$ nên</p> <p>$\lim \left(\sqrt{n^2 + an + 2018} - n - 2 \right) = 0$ mà $\lim \left(\sqrt{n^2 + an + 2018} - n - 2 \right) = \frac{a-4}{2}$. Ta được</p> <p>$a = 4$. Vậy $A = 4^{2018}$.</p>	0,5
5 (2 điểm)		2



5a)

1

Gọi I là trung điểm của BC nên tứ giác ADCI là hình thoi cạnh a nên $IA = IB = IC = a$ thì tam giác ABC vuông tại A, suy ra AC vuông góc DI

0,25

$$AC \perp ID (ID \parallel AB), AC \perp SD \Rightarrow AC \perp (SID) \\ \Rightarrow AC \perp SI$$

0,25

$$\text{Do } AC \perp SI, BC \perp SI \Rightarrow SI \perp (ABCD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SBC)$$

0,25

$$\text{Ta có : } SD = \sqrt{SI^2 + ID^2} = 2a$$

0,25

5b)

1

Từ M kẻ hai đường thẳng lần lượt song song với SD, AC chúng cắt theo thứ tự SB tại Q và AB tại G, AC tại N. Từ G kẻ đường thẳng song song SD, cắt SA tại E, từ N kẻ đường thẳng song song với SD cắt SC tại P. Ta được thiết diện là ngũ giác GNPQE.

0,5

$$\text{Ta có } BD = a\sqrt{3} \text{ nên tính được } EG = NP = 2\left(a - x\sqrt{3}\right), QM = 2\left(a - \frac{x}{\sqrt{3}}\right), GN = 3x$$

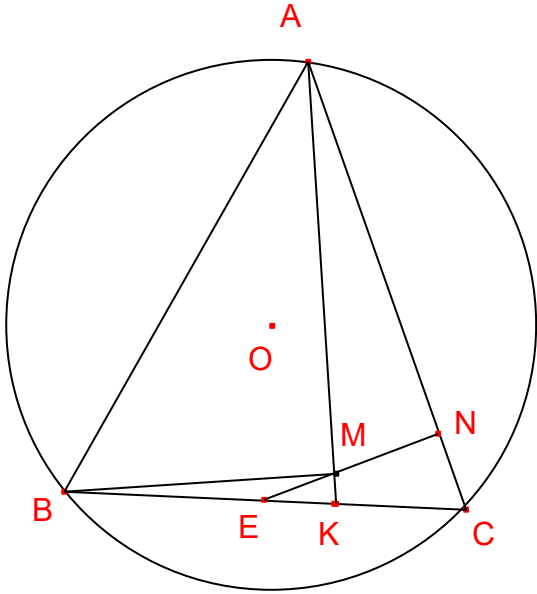
0,25

Tứ giác EGMQ và MNPQ là hai hình thang vuông đường cao lần lượt là GM và NM nên

$$S_{MNPQE} = 4x(3a - 2\sqrt{3}x)$$

$$\text{Max } S_{MNPQE} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \text{ tại } x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

0,25

6 (1 điểm)		1
		
	Chứng minh AC vuông góc với EM.	0,25
	Từ đó AC : $x = 0$ nên A(0, 0). Và C(0; y) nên B(6; $3\sqrt{3} - y$)	0,25
	Do $BM \perp AM \Rightarrow y = 3\sqrt{3}$ nên B(6;0) và C(0; $3\sqrt{3}$)	0,25
	Ta được BC: $2x + 3\sqrt{3}y - 18 = 0$	0,25
7 (1 điểm)		1
	$\begin{cases} x^3 + 7x^2 + 18x + 18 = y^3 - 2y^2 + 3y(1) \\ (x+2)^2 + y^2 - 3y - 9 + 3\sqrt{4x+1} = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + x + y - 1}(y + \sqrt{4x+1} - 3)(2) \end{cases}$	
	Ta có (1) $\Leftrightarrow x + 2 = y - 1$	0,25
	<p>Thế vào (2) ta được:</p> $2x^2 + 4x - 5 = (x + \sqrt{4x+1})(\sqrt{2x^2 + 4x + 4} - 3)$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 5 = (x + \sqrt{4x+1}) \frac{(\sqrt{2x^2 + 4x + 4} - 3)^2 - 9}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4} + 3}$	

	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4x - 5 = 0(3) \\ x + \sqrt{4x+1} = \sqrt{2x^2 + 4x + 4} + 3(4) \end{cases}$	
	$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{14}}{2} (t/m) \\ x = \frac{-2 - \sqrt{14}}{2} (l) \end{cases}$	0,25
	<p>(4) $\Leftrightarrow x - 3 + \sqrt{4x+1} = \sqrt{2x^2 + 4x + 4}$.</p> <p>Do $2x^2 + 4x + 4 > 4x + 1 \geq 0$ nên $x > 3$. Ta có</p> $(x-3) + \sqrt{4x+1} \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4x + 1} = \sqrt{2(x^2 - 2x + 10)}$ $< \sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}$ <p>nên (4) vô nghiệm.</p> <p>Vậy $S = \left\{ \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}; \frac{4 + \sqrt{14}}{2} \right\}$</p>	0,25
8 (1 điểm)		1
	<p>Ta có $x^2 + x + 1 \geq 3x$ nên $\frac{x}{x^2 + x + 1 + yz} \leq \frac{x}{3x + yz}$. Từ đó</p> $VT \leq \frac{x}{3x + yz} + \frac{y}{3y + zx} + \frac{z}{3z + xy} .$	0,25
	<p>Đặt $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ nên a, b, c là ba cạnh của một tam giác có p = 3.</p> $VT = \frac{p-b}{ac} + \frac{p-c}{ba} + \frac{p-a}{cb}$ $\frac{p-b}{ac} = \frac{1}{6} \frac{(a+b+c)(a+c-b)}{2ac} = \frac{1}{6} (1 + \cos B) \text{ nên } VT = \frac{1}{6} (3 + \cos A + \cos B + \cos C)$	0,25
	<p>Mà $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$</p>	0,25
	<p>suy ra $VT \leq \frac{3}{4}$.Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.</p>	0,25

Câu 1 (2,0 điểm).

a. Tìm m để hàm số $y = \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin 5x - 4\cos 5x - 2m + 3}}$ có tập xác định là \mathbb{R} .

b. Giải phương trình $2(1 + \cos x)(1 + \cot^2 x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Một tứ giác có bốn góc tạo thành một cấp số nhân và số đo góc lớn nhất gấp 8 lần số đo góc nhỏ nhất. Tính số đo các góc của tứ giác trên.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 4(n+2)$. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức Niu – tơn của $P = x(1-2x)^n + x^2(1+3x)^{2n}$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho hình đa giác đều H có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của hình H . Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật không phải là hình vuông?

Câu 5 (1,0 điểm). Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 20}{x - 2} = 10$. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6f(x) + 5} - 5}{x^2 + x - 6}$.

Câu 6 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , hai điểm A và B nằm trên đường thẳng $x - 3y + 11 = 0$, điểm A có hoành độ dương, trọng tâm của tam giác ABC là $G(\frac{2}{3}; \frac{5}{3})$ và chu vi của tam giác ABC bằng $3\sqrt{10} + 5\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

Câu 7 (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M là điểm nằm trên SB sao cho $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA . Tính theo a diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

b. E là một điểm thay đổi trên cạnh AC . Xác định vị trí điểm E để ME vuông góc với CD .

Câu 8 (1,0 điểm). Xét phương trình $ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$ với a, b là các số thực, $a \neq 0, a \neq b$ sao cho các nghiệm đều là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2 - 3ab - 10a}{a^2}.$$

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

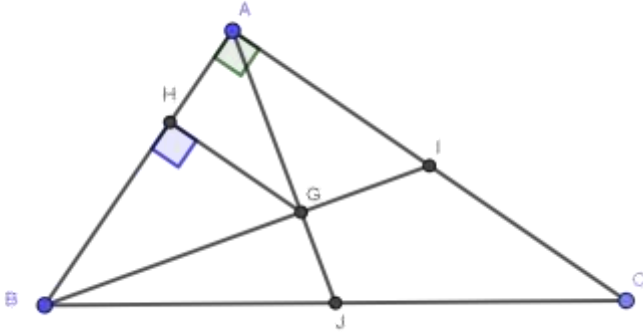
I. LƯU Ý CHUNG:

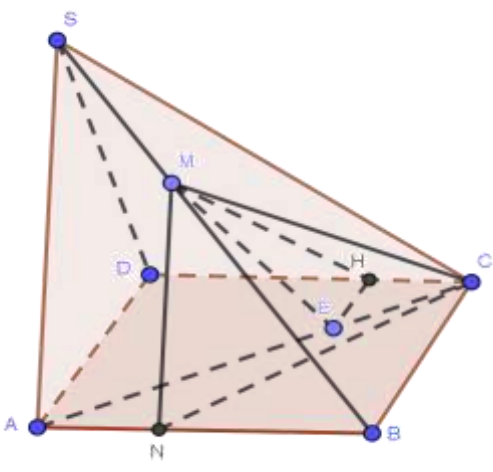
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	(2,0 điểm)	
	a.(1,0 điểm).	
	Hàm số có tập xác định là \mathbb{R} khi và chỉ khi $f(x) = 3\sin 5x - 4\cos 5x - 2m + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$	0,25
	Ta có: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin 5x - \frac{4}{5}\cos 5x > \frac{2m-3}{5}, \forall x \in \mathbb{R}.$	0,25
	$\Leftrightarrow \sin(5x - \varphi) > \frac{2m-3}{5}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{3}{5} \\ \sin \varphi = \frac{4}{5} \end{cases}.$ Do $-1 \leq \sin(5x - \varphi) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2m-3}{5} < -1 \Leftrightarrow m < -1.$ Vậy $m < -1.$	0,5
	b.(1,0 điểm)	
	ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ $Pt \Leftrightarrow 2(1 + \cos x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{2}{1 - \cos x} = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x} \Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x + 1 = 0$	0,25
	Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}), -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$, Phương trình trở thành: $t + \frac{t^2 - 1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$	0,25
	Với $t = -1$, ta có $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi(tm) \\ x = \pi + k2\pi(l) \end{cases}.$ Vậy phương trình có họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$	0,25

2	(1,0 điểm)	
	<p>Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A < B < C < D$) theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân thỏa mãn yêu cầu với công bội q. Ta có: $B = qA, C = q^2 A, D = q^3 A$.</p>	0,25
	<p>Theo gt, ta có: $\begin{cases} A + B + C + D = 360 \\ D = 8A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(1 + q + q^2 + q^3) = 360 \\ Aq^3 = 8A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ A = 24^0 \end{cases}$.</p>	0,5
	Suy ra $B = 48^0, C = 96^0, D = 192^0$.	0,25
3	(1,0 điểm)	
	<p>ĐK: $n \geq 0$, ta có $\frac{(n+4)!}{(n+1)! \cdot 3!} - \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3!} = 4(n+2) \Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+3)}{6} - \frac{(n+3)(n+1)}{6} = 4$ $\Leftrightarrow 3n = 15 \Leftrightarrow n = 5$.</p>	0,25
	<p>Với $n = 5$, ta có $P = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$ Xét khai triển: $x(1-2x)^5 = x \sum_{k=0}^5 C_5^k (-2x)^k$, suy ra hệ số chứa x^5 ứng với $k = 4$ và ta có $a_5 = C_5^4 (-2)^4 = 80$ Xét khai triển: $x^2(1+3x)^{10} = x^2 \sum_{m=0}^{10} C_{10}^m (3x)^m$, suy ra hệ số chứa x^5 ứng với $m = 3$ và ta có $a_5 = C_{10}^3 \cdot 3^3 = 3240$.</p>	0,5
	Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là: $a_5 = 80 + 3240 = 3320$.	0,25
4	(1,0 điểm)	
	<p>Số phần tử của không gian mẫu là $\Omega = C_{24}^4 = 10626$. Đa giác đều 24 đỉnh có 12 đường chéo qua tâm. Cứ 2 đường chéo qua tâm tương ứng cho ta một hình chữ nhật hoặc hình vuông. Số hình chữ nhật và hình vuông được tạo thành là C_{12}^2.</p>	0,25
	<p>Giả sử A_1, A_2, \dots, A_{24} là 24 đỉnh của hình H. Vì H là đa giác đều nên 24 đỉnh nằm trên 1 đường tròn tâm O. Góc $A_i O A_{i+1} = \frac{360^0}{24} = 15^0$ với $i = 1, 2, \dots, 23$ Ta thấy: $A_1 O A_7 = A_7 O A_{14} = A_{14} O A_{21} = 90^0$, do đó $A_1 A_7 A_{14} A_{21}$ là một hình vuông, xoay hình vuông này 15^0 ta được hình vuông $A_2 A_8 A_{15} A_{22}$, cứ như vậy ta được 6 hình vuông.</p>	0,5
	<p>Số hình chữ nhật không là hình vuông là: $C_{12}^2 - 6 = 60$. Vậy xác suất cần tính là: $\frac{60}{C_{24}^4} = \frac{10}{1771}$.</p>	0,25
5	(1,0 điểm)	
	<p>Đặt $\frac{f(x)-20}{x-2} = g(x) \Rightarrow f(x) - 20 = (x-2) \cdot g(x)$</p>	0,25
	<p>Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-20}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) \Rightarrow g(2) = 10$. Lại có: $f(2) - 20 = 0 \Rightarrow f(2) = 20$.</p>	0,25
	Suy ra:	0,5

	$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6f(x)+5} - 5}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(f(x) - 20)}{(x-2)(x+3)(\sqrt[3]{(6f(x)+5)^2} + 5\sqrt[3]{6f(x)+5} + 25)}$ $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6.g(x)}{(x+3)(\sqrt[3]{(6f(x)+5)^2} + 5\sqrt[3]{6f(x)+5} + 25)} = \frac{6.g(2)}{5(\sqrt[3]{(6f(2)+5)^2} + 5\sqrt[3]{6f(2)+5} + 25)}$ $= \frac{4}{25}.$	
6	(1,0 điểm)	
	<p>Gọi H là hình chiếu của G trên đoạn $AB \Rightarrow H(0; \frac{11}{3}); GH = d(G, AB) = \frac{2\sqrt{10}}{3}$.</p> <p>Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. Ta có $AC = 2AI = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot GH = 2\sqrt{10}$.</p> <p>Ta có: $\begin{cases} BC^2 - AB^2 = AC^2 = (2\sqrt{10})^2 = 40 \\ BC + AB = 3\sqrt{10} + 5\sqrt{2} - AC = \sqrt{10} + 5\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC = 5\sqrt{2} \\ AB = \sqrt{10} \end{cases}$</p>	0,5
	$AG = \frac{2}{3} \cdot AJ = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot BC = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$ <p>Gọi $A(3a-11, a) \in AB$. Ta có $AG = \frac{5\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow 3a^2 - 22a + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = \frac{10}{3} \end{cases}$</p> <p>Với $a = 4 \Rightarrow A(1; 4)$</p> <p>Với $a = \frac{10}{3} \Rightarrow A(-1; \frac{10}{3})$ (I).</p>	0,25
	<p>Ta có: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AH} \Rightarrow B(-2; 3); \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} \Rightarrow I(2; 1)$.</p> <p>Do I là trung điểm của $AC \Rightarrow C(3; -2)$.</p> <p>Vậy $A(1; 4); B(-2; 3); C(3; -2)$.</p>	0,25
		
7	(2,0 điểm)	
	a.(1,0 điểm)	
	Từ M kẻ $MN \parallel SA$ ($N \in AB$). Khẳng định thiết diện là tam giác CMN .	0,25
	<p>Ta có: $\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BS} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2a}{3}$.</p> <p>Xét $\triangle SMC$ có: $MC^2 = SM^2 + SC^2 - 2 \cdot SM \cdot SC \cdot \cos MSC = \frac{a^2}{9} + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{9}$</p> <p>$\Rightarrow MC = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.</p>	0,25

	$CN = \sqrt{BN^2 + CB^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + a^2} = \frac{\sqrt{13}a}{3}.$	
	<p>Có $\cos CMN = \frac{MN^2 + MC^2 - CN^2}{2.MC.MN} = \frac{\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} - \frac{13a^2}{9}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2a}{3}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$</p> <p>Suy ra $\sin CMN = \sqrt{1 - \cos^2 CMN} = \frac{3\sqrt{21}}{14}.$</p>	0,25
	<p>Diện tích thiết diện là:</p> $S_{\Delta CMN} = \frac{1}{2}.MC.MN.\sin CMN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 (\text{đvdt}).$	0,25
	b.(1,0 điểm)	
	<p>Đặt $CE = xCA$. Kẻ $EH \perp CD (H \in CD) \Rightarrow EH // AD$ nên $CH = xCD$</p> <p>Suy ra $\overrightarrow{CH} = x\overrightarrow{CD}.$</p>	0,25
	$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CD} - \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$ $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HE}$	0,25
	<p>Để ME vuông góc CD điều kiện là:</p> $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HE}) \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \text{ do } HE \perp CD.$ $\Leftrightarrow \left[x\overrightarrow{CD} - \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right) \right] \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow x\overrightarrow{CD}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \text{ do } CB \perp CD$	0,25
	<p>Do ΔSCD đều nên $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS.CD.\cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$. Do đó</p> $x.a^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$ <p>Vậy E thuộc đoạn AC thỏa mãn $CE = \frac{1}{3}CA$.</p>	0,25
		
8	(1,0 điểm)	
	Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm $x_1, x_2, x_3 > 0$.	0,25

	<p>Theo viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{1}{a} > 0 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = \frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow a, b > 0.$</p> <p>Đặt $t = \frac{1}{a}$ ($t > 0$). Ta có:</p> <p>$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 x_2 x_3 \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3$ (áp dụng BĐT Côsi) $\Rightarrow t \leq \frac{t^3}{27} \Leftrightarrow t \geq 3\sqrt{3}.$</p>	
	<p>Ta lại có:</p> <p>$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_3 x_1 \leq \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3} \Rightarrow -3(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_3 x_1) \geq -(x_1 + x_2 + x_3)^2 = -t^2.$</p>	0,25
	<p>Khi đó $P = \frac{2-3ab-10a}{a^2} = 2 \cdot \frac{1}{a^2} - 3 \frac{b}{a} - 10 \frac{1}{a} \geq t^2 - 10t.$</p>	0,25
	<p>Xét hàm $f(t) = t^2 - 10t, t \geq 3\sqrt{3}$. Ta được</p> <p>$\min_{x \in [3\sqrt{3}; +\infty)} f(t) = 27 - 30\sqrt{3} \Leftrightarrow t = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}.$</p> <p>Với $\begin{cases} a = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$ thay vào thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy $\min P = 27 - 30\sqrt{3}.$</p>	0,25

ĐỀ CHÍNH THỨC**Môn thi: TOÁN****Họ và tên:.....****LỚP 11 THPT****SỐ BÁO DANH:.....**

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề gồm có 01 trang.

Câu 1 (2.0 điểm)

a. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x - \cos 2x - 3\sin x - \cos x + 2}{\sin x} = 0.$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2 y^5} = 4(y^2 - x^2) \\ 5\sqrt[3]{x^4 y} = y^2 + x^2 \end{cases}$$

Câu 2 (2.0 điểm)

a. Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+8} - x^4 + 3x - 6}{(x-1)^2}.$

b. Một hộp đựng chín quả cầu được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu quả cầu để xác suất có ít nhất một quả cầu ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\frac{5}{6}$.**Câu 3 (2.0 điểm)**a. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$u_1 = 5, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2 + n - 2}{n^3 + 3n^2 + 2n}; n \geq 1.$$

Tính giới hạn $\lim(n.u_n)$.b. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3^{2n} + 3n^2 + 7$ là một số chính phương.**Câu 4 (3.0 điểm)**Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác $BC'D$.a. Xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (ABG) . Thiết diện đó là hình gì?b. Hai điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng $AD, A'C$ sao cho MN song song với mặt phẳng $(BC'D)$, biết $AM = \frac{1}{4}AD$. Tính tỉ số $\frac{CN}{CA'}$.**Câu 5 (1.0 điểm)** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[3]{\frac{2a}{4a+4b+c}} + \sqrt[3]{\frac{2b}{4b+4c+a}} + \sqrt[3]{\frac{2c}{4c+4a+b}} < 2$$

.....**HẾT**.....

YÊU CẦU CHUNG

* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

* Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.

* Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.

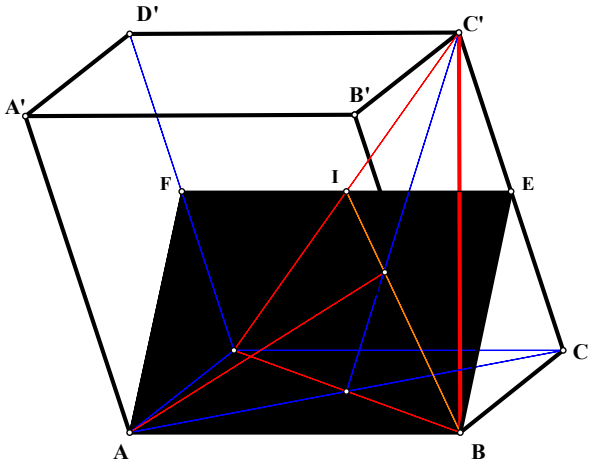
* Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.

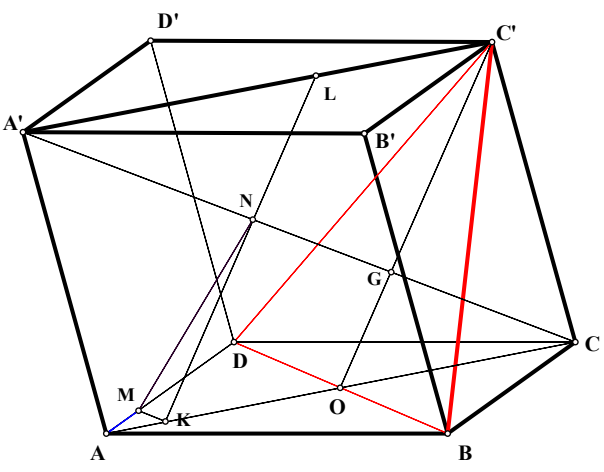
* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm)	a. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x - \cos 2x - 3\sin x - \cos x + 2}{\sin x} = 0.$	1,0
	Điều kiện xác định: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi.$ Phương trình $\Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x - 3\sin x - \cos x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x - \cos x - (1 - 2\sin^2 x) - 3\sin x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + (2\sin^2 x - 3\sin x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x + \sin x = 1 \end{cases}$	0,25
	$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$	0,25
	$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$	0,25
	Đối chiếu điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. (k \in \mathbb{Z}).$	0,25
	b. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2 y^5} = 4(y^2 - x^2) \\ 5\sqrt[3]{x^4 y} = y^2 + x^2 \end{cases}$	1,0

	Ta thấy $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình	0,25
	Với $(x; y) \neq (0; 0)$, ta có: $15x^2y^2 = 4(y^2 + x^2)(y^2 - x^2) \Leftrightarrow (4x^2 - y^2)(x^2 + 4y^2) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2x$	0,25
	TH1: $y = 2x$, ta có: $3\sqrt[3]{x^2 \cdot 32x^5} = 4(4x^2 - x^2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 \cdot 32x^5} = 4x^2$ $\Leftrightarrow 32x^7 = 64x^6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$ (vì $(x; y) \neq (0; 0)$) Do đó hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 4)$	0,25
	TH2: $y = -2x$, ta có: $-3\sqrt[3]{x^2 \cdot 32x^5} = 4(4x^2 - x^2) \Leftrightarrow -\sqrt[3]{x^2 \cdot 32x^5} = 4x^2$ $\Leftrightarrow -32x^7 = 64x^6 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 4$ (vì $(x; y) \neq (0; 0)$) Do đó hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-2; 4)$ Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm: $(0; 0)$, $(2; 4)$, $(-2; 4)$.	0,25
	a. Tính : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+8} - x^4 + 3x - 6}{(x-1)^2}$	1,0
Câu 2 (2,0 điểm)	Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+8} - x^4 + 3x - 6}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{8x+8} - (x+3)}{(x-1)^2} - \frac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2} \right]$	0,25
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+8} - (x+3)}{(x-1)^2} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2}$	0,25
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x+8 - (x+3)^2}{(x-1)^2(\sqrt{8x+8} + (x+3))} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^2}$	
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^2}{(x-1)^2(\sqrt{8x+8} + x + 3)} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^2}$	0,25
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{8x+8} + x + 3} - \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3)$	
	$= \frac{-1}{8} - 6 = -\frac{49}{8}$	0,25
	b. Một hộp đựng chín quả cầu được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu quả cầu để xác suất có ít nhất một quả cầu ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\frac{5}{6}$	1,0
	Giả sử ta lấy ra x quả cầu ($1 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$), số cách chọn x quả cầu từ 9 quả cầu trong hộp là C_9^x nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^x$. Gọi A là biến cố “trong số x quả cầu lấy ra, có ít nhất một quả cầu ghi số chia hết cho 4”, thế thì biến cố đối của A là \bar{A} : “trong số x quả cầu lấy ra, không có quả cầu nào ghi số chia hết cho 4”.	0,25

<p>Câu 3 (2,0 điểm)</p>	<p>Số cách chọn tương ứng với biến cố \bar{A} là $n(\bar{A}) = C_7^x$.</p> <p>Ta có: $P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{C_7^x}{C_9^x} = \frac{(9-x)(8-x)}{72} = \frac{x^2 - 17x + 72}{72}$</p>	0,25
	<p>Do đó: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) > \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(\bar{A}) = \frac{x^2 - 17x + 72}{72} < \frac{1}{6}$.</p> <p>hay $x^2 - 17x + 60 < 0 \Leftrightarrow 5 < x < 12$</p>	0,25
	<p>Vì $1 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$ nên $6 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$.</p> <p>Do đó giá trị nhỏ nhất của x là 6.</p> <p>Vậy số quả cầu phải lấy ra ít nhất mà ta phải tìm là 6 quả cầu.</p>	0,25
	<p>a. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:</p> <p>$u_1 = 5, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2 + n - 2}{n^3 + 3n^2 + 2n}; n \geq 1$.</p> <p>Tìm $\lim(n.u_n)$</p>	1.0
	<p>Ta có:</p> <p>$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}$</p> <p>Hay: $u_{n+1} - \frac{2}{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{n}\right)$</p>	0.25
	<p>Đặt $v_n = u_n - \frac{2}{n}; n \geq 1$. Khi đó ta có dãy số $(v_n), v_1 = 3; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n; n \geq 1$</p> <p>là một cấp số nhân có $v_1 = 3$, công bội $q = \frac{1}{2}$.</p> <p>Nên $v_n = 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ hay $u_n = \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{2}{n}; n \geq 1 \Rightarrow n.u_n = \frac{3n}{2^{n-1}} + 2$.</p>	0.25
	<p>Bằng quy nạp ta chứng minh được $2^{n+1} > n^2; \forall n \geq 1$. (1)</p> <p>Thật vậy: Với $n = 1, n = 2, n = 3$, (1) đúng</p> <p>Giả sử (1) đúng với $n = k, (k \geq 3)$ tức $2^{k+1} > k^2$ đúng</p> <p>Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$,</p> <p>Thật vậy: $2^{k+2} = 2 \cdot 2^{k+1} > 2 \cdot k^2 > (k+1)^2, \forall k \geq 3$</p>	0.25
	<p>Suy ra: $0 < \frac{3n}{2^{n-1}} < \frac{12}{n}$. Từ đây suy ra: $\lim \frac{3n}{2^{n-1}} = 0$.</p> <p>Khi đó $\lim(n.u_n) = \lim\left(\frac{3n}{2^{n-1}} + 2\right) = 2$.</p>	0.25
	<p>b. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3^{2n} + 3n^2 + 7$ là một số chính phương.</p>	1.0
	<p>Nếu $3^{2n} + 3n^2 + 7 = b^2$ với $b \in \mathbb{N}^*$ thì $b^2 > 3^{2n}$ hay $b > 3^n$. Điều này chứng tỏ: $b \geq 3^n + 1$.</p>	0.25
	<p>Do đó: $3^{2n} + 3n^2 + 7 = b^2 \geq (3^n + 1)^2 = 3^{2n} + 2 \cdot 3^n + 1$.</p> <p>Suy ra $2 \cdot 3^n \leq 3n^2 + 6$ (*)</p>	0.25

	<p>Nếu $n \geq 3$ thì (*) không xảy ra vì:</p> $2.3^n = 2.(1+2)^n = 2(C_n^0 + C_n^1.2 + C_n^2.2^2 + \dots)$ $= 2\left(1 + 2n + \frac{n(n-1)}{2}.2^2 + \dots\right)$ $> 2 + 4n + 4n^2 - 4n = 3n^2 + (n^2 + 2)$ $\geq 3n^2 + 11 > 3n^2 + 6$ <p>Do đó $n = 1$ hoặc $n = 2$.</p>	0.25
	<p>Khi $n = 1$ ta tính được $3^{2n} + 3n^2 + 7 = 19$ không phải là số chính phương</p> <p>Khi $n = 2$ ta tính được $3^{2n} + 3n^2 + 7 = 100$ là số chính phương.</p> <p>Kết luận: $n = 2$</p>	0.25
<p>Câu 4 (3,0 điểm)</p>	<p>Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác $BC'D$.</p>	3,0
	<p>a. Xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (ABG). Thiết diện đó là hình gì?</p>	1,5
		0,5
	<p>Trong mặt phẳng $(BC'D)$ kéo dài BG cắt $C'D$ tại I.</p>	0,25
	<p>Khi đó:</p> $\begin{cases} (ABG) \cap (CDD'C') = Ix \\ AB \subset (ABG), CD \subset (CDD'C') \Rightarrow Ix \parallel CD \\ AB \parallel CD \end{cases}$	0,25
	<p>Từ đó, trong $(CDD'C')$ kẻ $Ix \parallel CD$ cắt CC', DD' lần lượt tại E, F</p>	0,25
	<p>Vậy thiết diện cần tìm là hình bình hành $ABEF$ (Vì $EF = CD = AB$ và EF song song với AB)</p>	0,25
	<p>b. Hai điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn $AD, A'C$ sao cho MN song song với mặt phẳng $(BC'D)$, biết $AM = \frac{1}{4}AD$. Tính tỉ số $\frac{CN}{CA'}$.</p>	1,5

	 <p>Gọi $O = AC \cap BD$. Ta thấy $A'C'$ đi qua G. Khi đó, qua M kẻ đường thẳng song song với BD và cắt AC tại K. Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, gọi $L = KN \cap A'C'$, ta có:</p> $\begin{cases} MN \parallel (BC'D) \\ MK \parallel (BC'D) \end{cases} \Rightarrow (MNK) \parallel (BC'D) \Rightarrow KN \parallel (BC'D) \Rightarrow KN \parallel OC'$	<p>0,25</p> <p>0,25</p>
	<p>Mặt khác, theo giả thiết, ta có: $\frac{AK}{AO} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{KO}{AO} = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow \frac{KO}{AC} = \frac{3}{8}$ và $\frac{KC}{AC} = \frac{7}{8}$</p>	<p>0,25</p>
	<p>Vì $KO = LC'$, $AC = A'C'$ nên $\frac{LC'}{A'C'} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{A'L}{A'C'} = \frac{5}{8}$</p>	<p>0,25</p>
	<p>Mà $\frac{A'L}{KC} = \frac{A'L}{A'C'} \cdot \frac{AC}{KC} = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{A'N}{NC} = \frac{5}{7}$</p>	<p>0,25</p>
	<p>Vậy $\frac{CN}{CA'} = \frac{7}{12}$.</p>	<p>0,25</p>
<p>Câu 5 (1.0 điểm)</p>	<p>Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :</p> $\sqrt[3]{\frac{2a}{4a+4b+c}} + \sqrt[3]{\frac{2b}{4b+4c+a}} + \sqrt[3]{\frac{2c}{4c+4a+b}} < 2 \quad (1)$	<p>1,0</p>
	<p>Ta chứng minh bổ đề sau: Cho các số thực dương m, n khi đó: $\sqrt[3]{4(m+n)} \geq \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} \quad (2)$, Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $m = n$. Thật vậy: Đặt $x = \sqrt[3]{m}, y = \sqrt[3]{n}$; ($x, y > 0$). Bất đẳng thức (2) được viết lại $\sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} \geq x + y$. Ta xét: $\begin{aligned} 4(x^3 + y^3) - (x + y)^3 &= 3(x^3 - x^2y - xy^2 + y^3) \\ &= 3(x - y)(x^2 - y^2) \\ &= 3(x - y)^2(x + y) \geq 0; \forall x, y > 0 \end{aligned}$</p>	<p>0,25</p>

	<p>Nên ta có: $4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3$ hay $\sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} \geq x + y$ hay bất đẳng thức (2) ở bổ đề được chứng minh xong.</p>	
	<p>Bất đẳng thức đã cho tương đương với</p> $\sqrt[3]{\frac{a}{16a+16b+4c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{16b+16c+4a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{16c+16a+4b}} < 1$ <p>Sử dụng bất đẳng thức (2) ở bổ đề trên ta có:</p> $\sqrt[3]{\frac{a}{16a+16b+4c}} = \sqrt[3]{\frac{a}{4((4a+4b)+c)}} \leq \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4(a+b)} + \sqrt[3]{c}} \leq \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$ <p>Tương tự:</p> $\sqrt[3]{\frac{b}{16b+16c+4a}} \leq \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}};$ $\sqrt[3]{\frac{c}{16c+16a+4b}} \leq \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$ <p>Từ đây ta có:</p> $\sqrt[3]{\frac{a}{16a+16b+4c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{16b+16c+4a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{16c+16a+4b}} \leq 1 \quad (3)$	<p>0,25</p> <p>0.25</p>
	<p>Đẳng thức (3) xảy ra khi $4a + 4b = c, 4b + 4c = a, 4c + 4a = b$ nên $8(a + b + c) = a + b + c \Rightarrow a + b + c = 0$ mâu thuẫn. Chứng tỏ dấu “=” không xảy ra.</p> <p>Vậy $\sqrt[3]{\frac{2a}{4a+4b+c}} + \sqrt[3]{\frac{2b}{4b+4c+a}} + \sqrt[3]{\frac{2c}{4c+4a+b}} < 2$</p>	<p>0,25</p>

Câu 1 (7,0 điểm).

a) Giải phương trình $\frac{2\sin^2\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\cos 3x}{1 - 2\sin x} = 1$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2(xy - x + y) \\ x^3 + 3y^2 + 5x - 12 = (12 - y)\sqrt{3 - x} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Câu 2 (2,0 điểm).

Một hộp chứa 17 quả cầu đánh số từ 1 đến 17. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Tính xác suất sao cho tổng các số ghi trên 3 quả cầu đó là một số chẵn.

Câu 3 (5,0 điểm).

Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Đặt $SD = x$ ($0 < x < a\sqrt{3}$).

a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD), biết rằng $x = a$.

b) Tìm x theo a để tích $AC \cdot SD$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4 (2,0 điểm).

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD. Hình chiếu vuông góc của điểm D lên các đường thẳng AB, BC lần lượt là $M(-2; 2), N(2; -2)$; đường thẳng BD có phương trình $3x - 5y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Câu 5 (4,0 điểm).

a) Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = 6, u_{n+1} = \frac{u_n^2 - n(u_n - 1) + n^2}{n}$, với $n \geq 1$

Tính giới hạn $\lim \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right)$

b) Cho ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

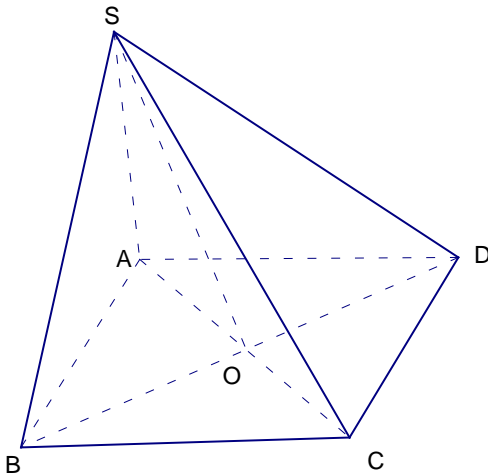
$$P = (a^2c + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b)(a + b + c).$$

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh.....

Số báo danh.....

Câu	Đáp án	Điểm
1. (7,0đ)	<p>a) (4,0 điểm) Giải phương trình $\frac{2\sin^2\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 3x}{1-2\sin x}=1$ (1)</p>	
	<p>Điều kiện: $\sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$</p>	0,5
	<p>(1) $\Leftrightarrow 1 - \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos 3x = 1 - 2\sin x$</p>	1,0
	<p>$\Leftrightarrow \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin x \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$</p>	1,0
	<p>$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$</p>	1,0
	<p>Đối chiếu với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$</p>	0,5
	<p>b) (3,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2(xy - x + y) & (1) \\ x^3 + 3y^2 + 5x - 12 = (12 - y)\sqrt{3 - x} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$</p>	
	<p>(1) $\Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = 0$</p>	1,0
	<p>$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$ Thay $y = x + 1$ vào phương trình (2) ta được phương trình $x^3 + 3x^2 + 11x - 9 = (11 - x)\sqrt{3 - x}$</p>	0,5
	<p>$\Leftrightarrow (x + 1)^3 + 5(x + 1) = (\sqrt{3 - x} + 1)^3 + 5(\sqrt{3 - x} + 1)$ (3) Đặt $a = x + 1; b = \sqrt{3 - x} + 1$, phương trình (3) trở thành $\Leftrightarrow a^3 + 5a = b^3 + 5b$ $\Leftrightarrow (a - b)\left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 5\right] = 0 \Leftrightarrow a = b$ Do đó (3) $\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3 - x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3 - x} = x$</p>	1,0
	<p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$</p>	0,5

	Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ với $\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$.	
2. (2,0đ)	Một hộp chứa 17 quả cầu đánh số từ 1 đến 17. Lấy ngẫu nhiên đồng thời ba quả cầu. Tính xác suất sao cho tổng các số ghi trên ba quả cầu đó là một số chẵn.	
	Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = C_{17}^3$	0,5
	Gọi A là biến cố: Lấy được đồng thời ba quả cầu sao cho tổng các số ghi trên ba quả cầu đó là một số chẵn. Xét các khả năng xảy ra KN 1: Lấy được ba quả cầu có các số ghi trên ba quả cầu đó đều là số chẵn. Số cách chọn là C_8^3 .	0,5
	KN 2: Lấy được hai quả cầu có các số ghi trên hai quả cầu đó đều là số lẻ và một quả cầu có số ghi trên quả cầu là số chẵn. Số cách chọn là $C_9^2 \cdot C_8^1$.	0,5
	Vậy: $P(A) = \frac{C_8^3 + C_9^2 \cdot C_8^1}{C_{17}^3} = \frac{43}{85}$.	0,5
3. (5,0đ)	Cho hình chóp $SABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Đặt $x = SD$ ($0 < x < a\sqrt{3}$). a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$, biết rằng $x = a$. b) Tìm x theo a để tích $AC \cdot SD$ đạt giá trị lớn nhất.	
	a) (3,0 điểm)	
	 <p>Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$. Khi $x = a$, ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.</p>	1,0
	Suy ra góc giữa thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc \widehat{SBO} . Mà $\triangle SOB = \triangle SOC \Rightarrow OB = OC$.	1,0
	\Rightarrow Đáy $ABCD$ là hình vuông. Do đó $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{SBO} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SBO} = 45^\circ$.	1,0
	b) (2,0 điểm)	
	Ta có $\triangle SOC = \triangle BOC \Rightarrow OS = OB \Rightarrow$ tam giác SBD vuông tại S .	0,5

	<p>Suy ra $BD = \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$</p> <p>$AC = 2OC = 2\sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{3a^2 - x^2}$.</p> <p>Do đó $AC \cdot SD = x\sqrt{3a^2 - x^2}$.</p>	0,5
	<p>Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si, ta có</p> <p>$x\sqrt{3a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow AC \cdot SD \leq \frac{3a^2}{2}$.</p> <p>Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi</p> <p>$x = \sqrt{3a^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.</p> <p>Vậy $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ thì tích $AC \cdot SD$ đạt giá trị lớn nhất.</p>	1,0
4. (2,0đ)	<p>Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$. Hình chiếu vuông góc của điểm D lên các đường thẳng AB, BC lần lượt là $M(-2;2), N(2;-2)$; đường thẳng BD có phương trình $3x - 5y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.</p> <div data-bbox="625 853 1050 1216" data-label="Image"> </div> <p>Gọi $I(x; y)$ là tâm hình bình hành $ABCD$.</p> <p>Vì tam giác BMD vuông tại M và I là trung điểm của BD nên $MI = \frac{1}{2}BD$ (1)</p> <p>Tương tự ta có $NI = \frac{1}{2}BD$ (2).</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra</p> <p>$MI = NI \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow y = x$ (3)</p> <p>Mà I thuộc BD nên $3x - 5y + 1 = 0$ (4)</p> <p>Từ (3) và (4) suy ra $x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.</p>	0,5
	<p>Do đó $ID = IB = MI = \frac{\sqrt{34}}{2} \Leftrightarrow B, D$ thuộc đường tròn (T) có tâm I bán kính</p> <p>$R = \frac{\sqrt{34}}{2}$. (T) có phương trình $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$.</p> <p>Vì B, D là giao điểm của đường thẳng BD và đường tròn (T) nên tọa độ B, D là</p>	0,5

	nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x-5y+1=0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}.$	
	TH1: $B(3;2), D(-2;-1)$ Suy ra phương trình đường thẳng $AB: y=2; AD: 4x-y+7=0 \Rightarrow A\left(-\frac{5}{4}; 2\right).$	0,5
	TH2: $B(-2;-1), D(3;2)$ Suy ra phương trình đường thẳng $AB: x=-2; AD: x+4y-11=0 \Rightarrow A\left(-2; \frac{13}{4}\right).$	0,5
5. (4,0đ)	a) (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) , biết $u_1=6, u_{n+1} = \frac{u_n^2 - n(u_n - 1) + n^2}{n}$ với $n \geq 1$. Tính giới hạn: $\lim \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right).$	
	Ta có: $u_1 = 6 > 3.1$ $u_2 = u_1^2 - u_1 + 2 = 32 > 3.2$ Giả sử $u_k > 3k, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Ta cần chứng minh $u_{k+1} > 3(k+1)$ Thật vậy: $u_{k+1} = \frac{u_k^2 - ku_k + k^2 + k}{k} = \frac{u_k(u_k - 3k) + 2ku_k + k^2 + k}{k}$ $\Rightarrow u_{k+1} > 2u_k + k + 1 > 2.3k + k + 1 > 3(k+1)$ (đpcm) Vậy $u_n > 3n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (1).	0,5
	$u_{k+1} = \frac{u_k^2 - ku_k + k^2 + k}{k} \Leftrightarrow u_{k+1} = \frac{u_k^2 - ku_k}{k} + k + 1$ $\Leftrightarrow u_{k+1} - (k+1) = \frac{u_k^2 - ku_k}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1} - (k+1)} = \frac{k}{u_k^2 - ku_k} = \frac{1}{u_k - k} - \frac{1}{u_k}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_k - k} - \frac{1}{u_{k+1} - (k+1)}$ (2).	0,5
	Áp dụng (2) suy ra $\frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_2 - 2}$ $\frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_2 - 2} - \frac{1}{u_3 - 3}$ \dots $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - n} - \frac{1}{u_{n+1} - (n+1)}$ Cộng theo về các đẳng thức trên ta được $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - (n+1)} = \frac{1}{5} - \frac{1}{u_{n+1} - (n+1)}$ (3) Mặt khác theo (1) ta có $u_{n+1} > 3(n+1) \Leftrightarrow u_n - (n+1) > 2n + 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,5

	<p>Vậy $\left \frac{1}{u_{n+1} - (n+1)} \right < \frac{1}{2n+2}$</p> <p>Mà $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_{n+1} - (n+1)} = 0$ (3)</p> <p>Từ (2) và (3), suy ra $\lim \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{5}$.</p>	0,5
	<p>b) (2,0 điểm) Cho ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a^2c + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b)(a + b + c)$.</p>	
	<p>Với ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 2]$ ta có</p> $a^2c + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b \leq a^2c + c^2b + b^2a - b^2c - c^2a - a^2b$ $\Rightarrow a^2c + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b \leq (a-b)(b-c)(c-a)$ $\Rightarrow P \leq Q \text{ với } Q = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \quad (1).$	0,5
	<p>Ta sẽ chứng minh $Q \leq \frac{32\sqrt{3}}{9}$ (2)</p> <p>Thật vậy: Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a = \max \{a; b; c\}$</p> <p>TH1: $a \geq b \geq c \Rightarrow Q \leq 0$</p> <p>TH2: $a \geq c \geq b$, áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho ba số không âm $(\sqrt{3}+1)(a-c); 2(c-b); (\sqrt{3}-1)(a+b+c)$ ta có</p> $(\sqrt{3}+1)(a-c)2(c-b)(\sqrt{3}-1)(a+b+c) \leq \left[\frac{2\sqrt{3}a + (\sqrt{3}-3)b}{3} \right]^3$ $\Rightarrow (a-c)(c-b)(a+b+c) \leq \frac{\left[2\sqrt{3}a + (\sqrt{3}-3)b \right]^3}{108}$ $\Rightarrow (a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c) \leq \frac{(a-b) \left[2\sqrt{3}a + (\sqrt{3}-3)b \right]^3}{108} \quad (3)$	0,5
	<p>Mà $\frac{(a-b) \left[2\sqrt{3}a + (\sqrt{3}-3)b \right]^3}{108} \leq \frac{32\sqrt{3}}{9}$ (4)</p> <p>Từ (3) và (4) suy ra $Q \leq \frac{32\sqrt{3}}{9}$.</p>	0,5
	<p>Do đó (2) đúng. Từ (1) và (2) suy ra $P \leq \frac{32\sqrt{3}}{9}$.</p> <p>Khi $a = 2, b = 0, c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ thì $P = \frac{32\sqrt{3}}{9}$.</p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{32\sqrt{3}}{9}$.</p>	0,5

--- Hết ---

Ghi chú: Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa

Câu 1 (4 điểm). Giải các phương trình sau:

- $2 \cos 2x - 8 \cos x + 5 = 0$
- $\frac{\sin 2x - \sin x + 2 \cos x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0.$

Câu 2 (4 điểm). Một đoàn tàu có 6 toa ở sân ga, trên sân ga có 6 hành khách chuẩn bị lên tàu, mỗi người độc lập với nhau và chọn toa tàu một cách ngẫu nhiên.

- Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 hành khách lên các toa tàu đó sao cho 6 người cùng lên một toa hoặc mỗi người lên một toa khác nhau?
- Tính xác suất sao cho một toa có 3 hành khách, một toa có 2 hành khách, một toa có 1 hành khách, còn ba toa còn lại không có ai lên.

Câu 3 (2 điểm). Xét khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ ($x \neq 0; n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$). Biết tích của số hạng thứ tư tính từ phải sang và số hạng thứ tư kể từ trái sang bằng 14400. Tìm n .

Câu 4 (4 điểm).

- Biết rằng các số $x; 2y - x; x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Đồng thời các số $1; y - 1; x + 2y - 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Hãy tìm x, y .

- Cho dãy số (u_n) biết:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n(u_n + 2) + n^2 + 1}{n + 1} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$
. Tìm $\lim u_n$.

Câu 5 (6 điểm). Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G', I lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ và ABB' .

- Chứng minh rằng:
 - $(A'BG') // (AGC')$
 - $IG' // (BCC'B')$
- Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Một đường thẳng d đi qua G cắt AB' tại H và EF tại K .
 - Xác định các điểm H, K .
 - Giả sử tất cả các cạnh của hình lăng trụ bằng a và các mặt bên là các hình vuông. Tính độ dài đoạn GH theo a .

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:, SBD:

Câu	Nội dung	Điểm
1/1	Giải PT $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0$	2,0
	<ul style="list-style-type: none"> $PT \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \text{ (TM)} \\ \cos x = \frac{3}{2} \text{ (KTM)} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. Vậy $S = \{\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi k \in \mathbb{Z}\}$ 	0,5 0,75 0,75
1/2	Giải PT $\frac{\sin 2x - \sin x + 2\cos x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$	2,0
	<ul style="list-style-type: none"> ĐK $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ $PT \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \text{ (KTM)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ Kết hợp với ĐK ta có $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi k \in \mathbb{Z} \right\}$ 	0,5 0,5 0,5 0,5
2/1	Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 hành khách lên các toa tàu đó sao cho 6 người cùng lên một toa hoặc mỗi người lên một toa ?	2,0
	<ul style="list-style-type: none"> TH1. Xếp 6 người cùng lên một toa có 6 cách. TH2. Xếp 6 người mỗi người lên một toa có $6!$ Cách. Vậy có $6 + 6! = 726$ cách. 	0,75 0,75 0,5
2/2	Tính xác suất sao cho một toa có 3 hành khách, một toa có 2 hành khách, một toa có 1 hành khách, còn ba toa còn lại không có ai lên.	2,0
	<ul style="list-style-type: none"> Ta có $\Omega = 6^6$ Chọn 3 hành khách và xếp họ lên 1 toa có $C_6^3 \cdot C_6^1$ cách. Chọn 2 hành khách tiếp theo và xếp họ lên 1 toa có $C_3^2 \cdot C_3^1$ cách. Khi đó 1 hành khách còn lại lên một toa có C_4^1 cách. Số kết quả thuận lợi cho biến cố là $(C_6^3 \cdot C_6^1) \cdot (C_3^2 \cdot C_3^1) \cdot C_4^1 = 7200$. 	0,5 0,25 0,25 0,25 0,5

	<ul style="list-style-type: none"> Xác suất cần tìm là $\frac{7200}{6^6} = \frac{25}{162}$. 	0,25
3	Tìm n.	2,0
	<ul style="list-style-type: none"> Ta có $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-2k} \quad (x \neq 0)$, mọi số hạng trong khai triển có dạng $T_{k+1} = C_n^k x^{n-2k}$. Tích số hạng cần tìm là $T_4 \cdot T_{n-2} = C_n^3 x^{n-6} \cdot C_n^{n-3} x^{6-n} = (C_n^3)^2$. Theo giả thiết ta có: $(C_n^3)^2 = 14400 \Leftrightarrow C_n^3 = 120 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 720 \quad (1)$ Giải PT (1) tìm được $n = 10$ (TM). Vậy $n = 10$. 	0,5 0,5 0,5 0,5
4/1	Tìm x, y.	2,0
	<ul style="list-style-type: none"> Theo gt ta có hệ PT $\begin{cases} 2(2y-x) = x+(x+2y) \\ (y-1)^2 = x+2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 & (1) \\ y^2-4y-x+2=0 & (2) \end{cases}$ Thế (1) vào (2) ta có: $2y^2 - 9y + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y=4 \Rightarrow x=2 \\ y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4} \end{cases}$. Thử lại và kết luận $x=2, y=4$ hoặc $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$ 	1,0 0,5 0,5
4/2	Tìm $\lim u_n$.	2,0
	<ul style="list-style-type: none"> Từ hệ thức truy hồi ta có: $(n+1) \cdot u_{n+1} = n \cdot u_n + (n+1)^2 \quad (3)$ Xét dãy số (v_n) với $v_n = n \cdot u_n \quad (4) \Rightarrow v_1 = 1$ Từ (3), (4) $\Rightarrow v_{n+1} = v_n + (n+1)^2 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = (n+1)^2$ $v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + (v_{n-2} - v_{n-3}) + \dots + (v_3 - v_2) + (v_2 - v_1) + v_1$ $= n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\Rightarrow u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}, \quad \lim u_n = \lim \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = +\infty$ 	0,5 0,5 0,5 0,5
5/1/a	CMR: $(A'BG') // (AGC')$	2,0
	<ul style="list-style-type: none"> Gọi M, M' là trung điểm của BC và $B'C' \Rightarrow$ Mặt phẳng $(A'BG')$ là $mf(A'BM')$, $mf(AGC')$ là $mf(AMC')$. CM: $AM // A'M', BM' // C'M$ CM: $(A'BG') // (AGC')$ 	0,5 1,0 0,5
5/1/b	CMR: $IG' // (BCC'B')$	1,0

	<ul style="list-style-type: none"> Tính $AB' = a\sqrt{2}, AM = a\frac{\sqrt{3}}{2}, B'M = a\frac{\sqrt{5}}{2}$ CM: $AB'^2 = AM^2 + B'M^2 \Rightarrow \triangle AB'M$ vuông tại M Tính $GM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, KM = \frac{a\sqrt{5}}{4}$ Xét $\triangle GKM$ vuông tại M, tính $GK = \frac{a\sqrt{19}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{57}}{3}$ 	0,5
		0,25
		0,5

Ghi chú:

- HD chấm chỉ giải tóm tắt, học sinh phải làm chi tiết và suy luận đầy đủ, chặt chẽ mới cho điểm tối đa.
- Cách giải khác mà đúng vẫn cho điểm (GK tự chia điểm thành phần).
- Không làm tròn điểm bài thi.

ĐỀ CHÍNH THỨC

Số báo danh

Môn thi: TOÁN - Lớp 11 THPT

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 09 tháng 3 năm 2018

(Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu)

Câu I (4,0 điểm).

1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + bx + 1$ biết rằng (P) đi qua điểm $A(2;1)$.

2. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 + x + 1} \geq x + 3$.

Câu II (4,0 điểm).

1. Giải phương trình $\frac{4\sin^3 x - 2\cos x(\sin x - 1) - 4\sin x + 1}{1 + \cos 4x} = 0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{xy} + (x - y)(\sqrt{xy} - 2) = \sqrt{y} + y \\ (y + \sqrt{xy} + x - x^2)(x + 1) - 4 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Câu III (4,0 điểm).

1. Cho x, y, z là các số thực phân biệt và không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{y+z}{(y-z)^2} + \frac{z+x}{(z-x)^2} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

2. Cho dãy số (u_n) xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tính giới hạn $\lim \left(\frac{u_n}{3^n} \right)$.

Câu IV (4,0 điểm).

1. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh của lớp 11A, 3 học sinh của lớp 11B và 5 học sinh của lớp 11C thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có học sinh của cùng một lớp đứng cạnh nhau.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A . Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $AM = AN$ (M, N không trùng với các đỉnh của tam giác).

Đường thẳng d_1 đi qua A và vuông góc với BN cắt cạnh BC tại $H\left(\frac{6}{5}; -\frac{2}{3}\right)$, đường thẳng d_2

đi qua M và vuông góc với BN cắt cạnh BC tại $K\left(\frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác

ABC , biết rằng đỉnh A thuộc đường thẳng $(\Delta): 5x + 3y + 13 = 0$ và có hoành độ dương.

Câu V (4,0 điểm).

1. Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện và cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C' . Chứng minh

rằng biểu thức $T = \frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'}$ có giá trị không đổi.

2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một điểm M di động trên cạnh đáy BC (M khác B, C). Mặt phẳng (α) đi qua M đồng thời song song với hai đường thẳng SB và AC . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (α) và tìm vị trí của điểm M để thiết diện đó có diện tích lớn nhất.

----- HẾT -----

ĐỀ CHÍNH THỨC

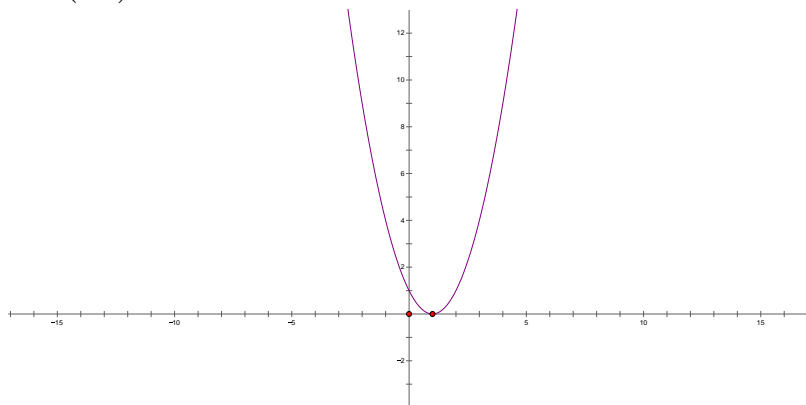
Môn thi: TOÁN- Lớp 11 THPT

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 09 tháng 3 năm 2018

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ THANG ĐIỂM

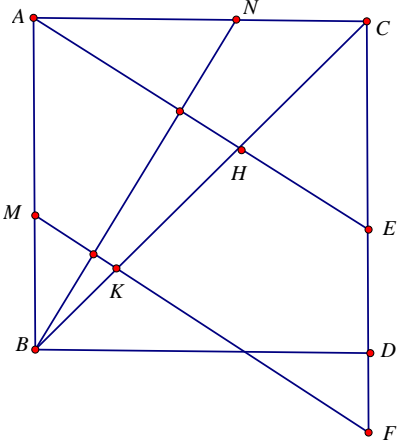
(Gồm có 07 trang)

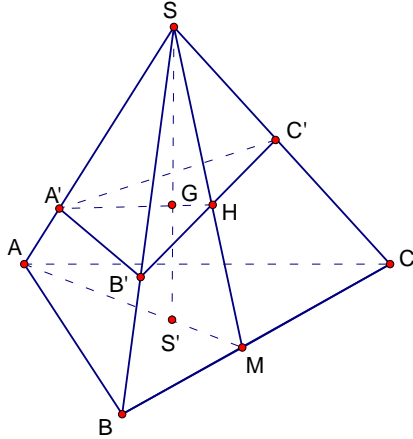
Câu	NỘI DUNG	Điểm							
I 4,0 điểm	1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + bx + 1$ biết rằng (P) đi qua điểm $A(2;1)$.	2,0							
	Do (P) đi qua điểm $A(2;1)$ nên $4 + 2b + 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2$	0,50							
	Ta được hàm số $y = x^2 - 2x + 1$ Bảng biến thiên như sau :	0,75							
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$y = x^2 - 2x + 1$</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>		x	$-\infty$	1	$+\infty$	$y = x^2 - 2x + 1$	$+\infty$	0
	x	$-\infty$	1	$+\infty$					
	$y = x^2 - 2x + 1$	$+\infty$	0	$+\infty$					
Đồ thị: Có đỉnh $I(1;0)$ và trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ và có hình dạng như sau:									
2. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 + x + 1} \geq x + 3$ (1).	2,0								
Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases} 4x^2 + 5x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -\frac{1}{4} \end{cases}$	0,50								
Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4x+1)} - (x+1) + 2(\sqrt{x^2 + x + 1} - 1) \geq 0$ (2)	0,50								
Xét $x \leq -1$, khi đó: $-(x+1) \geq 0, \sqrt{x^2 + x + 1} - 1 = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \geq 0$ nên (2) luôn đúng. Vậy $x \leq -1$ là nghiệm của BPT đã cho.	0,25								
Xét $x \geq -\frac{1}{4}$: BPT (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+1}) + \frac{2(x^2 + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \geq 0$ (3) $\Leftrightarrow \frac{3x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+1}} + \frac{2x(x+1)}{1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$	0,50								
Vậy tập nghiệm của BPT là $S = (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$	0,25								

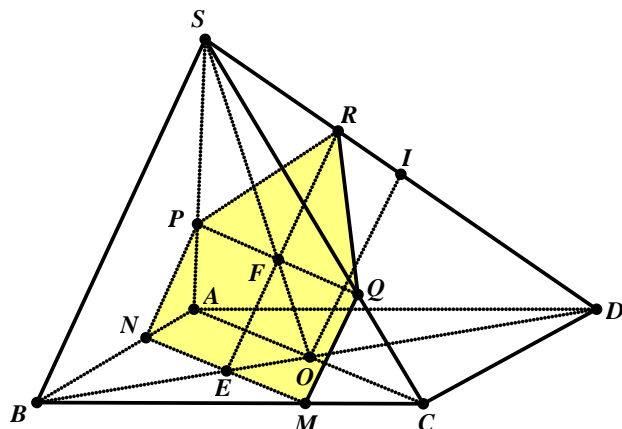
	Chú ý 1: Nếu học sinh không xét các trường hợp như trên mà biến đổi luôn từ BPT (2) thành BPT (3) và đưa ra đúng tập nghiệm thì <u>chỉ cho tối đa 1,25 đ.</u>	
	Chú ý 2: Có thể giải theo cách sau ĐKXĐ: $x \leq -1$ hoặc $x \geq -\frac{1}{4}$.	0,50
	BPT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 5x + 1} - (x+1) + 2(\sqrt{x^2 + x + 1} - 1) \geq 0$ (2)	0,50
	Nhận thấy $x = -1$ là một nghiệm của BPT.	0,25
	Xét trường hợp $x \in (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. Khi đó $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + (x+1) > 0$ nên BPT (2) tương đương với $\frac{3(x^2 + x)}{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + (x+1)} + \frac{2(x^2 + x)}{1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} \geq 0$ (3) $\Leftrightarrow x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x \geq 0$.	0,50
	Từ đó có tập nghiệm của BPT là $S = (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ Nếu học sinh giải theo cách này nhưng không xét các trường hợp như trên mà biến đổi luôn từ BPT (2) thành BPT (3) và đưa ra đúng tập nghiệm thì chỉ cho tối đa 1,25 đ.	0,25
II 4,0 điểm	1. Giải phương trình $\frac{4\sin^3 x - 2\cos x(\sin x - 1) - 4\sin x + 1}{1 + \cos 4x} = 0$.	2,0
	ĐKXĐ: $1 + \cos 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$	0,25
	Phương trình tương đương với $4\sin x(1 - \cos^2 x) - 2\cos x \sin x + 2\cos x - 4\sin x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow -4\sin x \cos^2 x - 2\cos x \sin x + 2\cos x + 1 = 0$	0,50
	$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(1 - \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ hoặc $\sin 2x = 1$	0,50
	$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.	0,50
	So sánh với điều kiện suy ra nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.	0,25
	2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{xy} + (x-y)(\sqrt{xy} - 2) = \sqrt{y} + y & (1) \\ (y + \sqrt{xy} + x - x^2)(x+1) - 4 = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$	2,0
	ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2) \geq 0. \end{cases}$	0,25
	Nhận thấy nếu $y = 0$ thì từ (1) suy $x = 0$. Thay $x = y = 0$ vào (2) không thỏa mãn. Vậy ta có điều kiện $x \geq 0, y > 0$, điều này có nghĩa là $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq 0, \sqrt{xy} + (x-y)(\sqrt{xy} - 2) + y \neq 0.$ Khi đó ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{xy} + (x-y)(\sqrt{xy} - 2) - y = 0$ $\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{(x-y)(y + \sqrt{xy} - 2)}{\sqrt{xy} + (x-y)(\sqrt{xy} - 2) + y} = 0$	0,50

	$\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y} \right] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y} = 0 \end{cases}$	0,25
	<p>• Xét $x = y$. Thế vào (2) ta được $x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.</p> <p>Vì $x = y > 0$ nên trường hợp này hệ có hai nghiệm $(1;1); \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right)$.</p>	0,50
	<p>• Xét phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y} = 0$ (3)</p> <p>Từ phương trình (2) ta có:</p> $y + \sqrt{xy} = x^2 - x + \frac{4}{x+1} = x+1 + \frac{4}{x+1} + (x-1)^2 - 2 = \left(\sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right)^2 + (x-1)^2 + 2 \geq 2$ <p>Do đó $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y} > 0$ nên (3) vô nghiệm.</p> <p>Vậy hệ có hai nghiệm $(1;1); \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right)$.</p> <p>Chú ý 3: Nếu học sinh không lập luận để chỉ ra $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq 0, \sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y \neq 0$ trước khi thực hiện nhân chia liên hợp từ phương trình (1) thì chỉ cho tối đa 1,75đ.</p>	0,50
III 4,0 điểm	<p>1. Cho x, y, z là các số thực phân biệt và không âm. Chứng minh rằng</p> $\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{y+z}{(y-z)^2} + \frac{z+x}{(z-x)^2} \geq \frac{9}{x+y+z}.$	2,0
	<p>Ta có $\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{y+z}{(y-z)^2} + \frac{z+x}{(z-x)^2} \geq \frac{9}{x+y+z}$</p> $\Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{y+z}{(y-z)^2} + \frac{z+x}{(z-x)^2} \right) \geq 9$	0,25
	<p>Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x > y > z \geq 0$.</p> <p>Khi đó có các bất đẳng thức sau:</p> <p>+) $x+y+z \geq x+y$</p> <p>+) $\frac{y+z}{(y-z)^2} \geq \frac{1}{y} \Leftrightarrow y(y+z) \geq (y-z)^2 \Leftrightarrow z(3y-z) \geq 0$ (luôn đúng)</p> <p>+) Tương tự cũng có $\frac{z+x}{(z-x)^2} \geq \frac{1}{x}$</p>	0,50
	<p>Do đó nếu đặt $F = (x+y+z) \left(\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{y+z}{(y-z)^2} + \frac{z+x}{(z-x)^2} \right)$ thì</p> $F \geq (x+y) \left(\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$	0,25

	Ta có bất đẳng thức cơ bản sau: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ với $\forall a, b, c > 0$.	0,25
	<p>Áp dụng ta được:</p> $\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = (x+y) \left(\frac{1}{(x+y)^2 - 4xy} + \frac{1}{xy} \right)$ $= (x+y) \left(\frac{1}{(x+y)^2 - 4xy} + \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2xy} \right) \geq \frac{9(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{9}{x+y}.$	0,50
	<p>Vậy $(x+y) \left(\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \geq (x+y) \frac{9}{x+y} = 9$. Suy ra $F \geq 9$.</p> <p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z=0 \\ (x+y)^2 - 4xy = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x = (2 \pm \sqrt{3})y \end{cases}$.</p>	0,25
	<p>2. Cho dãy số (u_n) xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$</p> <p>Tính giới hạn $\lim \left(\frac{u_n}{3^n} \right)$.</p>	2,0
	Từ giả thiết ta có $u_{n+2} - 2u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n), \forall n \geq 1$. Suy ra dãy $v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n$ là một cấp số nhân có công bội $q = 3 \Rightarrow v_{n+1} = 3^{n-1}v_2 = 3^{n-1}(5 - 2.2) = 3^{n-1}$ (1)	0,50
	Cũng từ giả thiết ta có $u_{n+2} - 3u_{n+1} = 2(u_{n+1} - 3u_n), \forall n \geq 1$. Suy ra dãy $w_{n+1} = u_{n+1} - 3u_n$ là một cấp số nhân có công bội $q = 2 \Rightarrow w_{n+1} = 2^{n-1}w_2 = 2^{n-1}(5 - 3.2) = -2^{n-1}$ (2)	0,50
	Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} u_{n+1} - 2u_n = 3^{n-1} \\ u_{n+1} - 3u_n = -2^{n-1} \end{cases} \Rightarrow u_n = 3^{n-1} + 2^{n-1}$	0,50
	Suy ra $\lim \left(\frac{u_n}{3^n} \right) = \lim \left(\frac{3^{n-1} + 2^{n-1}}{3^n} \right) = \lim \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) = \frac{1}{3}$	0,50
	Chú ý 4: Có thể giải theo cách sau	0,50
	Xét phương trình đặc trưng của dãy truy hồi là $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.	0,50
	Phương trình có 2 nghiệm là $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.	0,50
	Do đó $u_n = a.2^n + b.3^n$. Với $u_1 = 2, u_2 = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$.	0,50
	Suy ra $u_n = 3^{n-1} + 2^{n-1}$ và do đó $\lim \left(\frac{u_n}{3^n} \right) = \frac{1}{3}$.	0,50
IV 4,0 điểm	1. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 11A, 3 học sinh lớp 11B và 5 học sinh lớp 11C thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có học sinh của cùng một lớp đứng cạnh nhau.	2,0
	Số phần tử của không gian mẫu: $ \Omega = 10!$	0,25
	<p>Gọi A là biến cố “Không có học sinh của cùng một lớp đứng cạnh nhau”. Để tìm A ta thực hiện theo hai bước sau:</p> <p>Bước 1: Xếp 5 học sinh của lớp 11C thành 1 dãy: có 5! cách xếp. Khi đó, 5 học sinh của lớp 11C tạo ra 6 khoảng trống được đánh số từ 1 đến 6 như sau:</p> <p style="text-align: center;">1C2C3C4C5C6</p>	0,25
	<p>Bước 2: Xếp 5 học sinh của hai lớp 11A và 11B vào các khoảng trống sao cho thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Khi đó chỉ xảy ra hai trường hợp sau:</p> <p>Trường hợp 1: Xếp 5 học sinh của hai lớp 11A và 11B vào các vị trí 1, 2, 3, 4, 5 hoặc các vị trí 2, 3, 4, 5, 6: có $2 \times 5! = 240$ cách xếp.</p>	0,50

<p>Trường hợp 2: Xếp 5 học sinh của hai lớp 11A và 11B vào các vị trí 2, 3, 4, 5; trong đó có 1 vị trí xếp 2 học sinh gồm 1 học sinh của lớp 11A và 1 học sinh của lớp 11B; 3 vị trí còn lại mỗi vị trí xếp 1 học sinh.</p> <p>+ Có 4 cách chọn một vị trí xếp 2 học sinh.</p> <p>+ Có 2×3 cách chọn cặp học sinh gồm 1 học sinh ở lớp 11A và 1 học sinh lớp 11B.</p> <p>Suy ra có $(4 \times 2 \times 3) \times 2!$ cách xếp 2 học sinh gồm 1 học sinh của lớp 11A và 1 học sinh của lớp 11B học sinh vào một vị trí.</p>	0,25
<p>+ Có 3! cách xếp 3 học sinh vào 3 vị trí còn lại (mỗi vị trí có 1 học sinh).</p> <p>Do đó trường hợp này có $(4 \times 2 \times 3) \times 2! \times 3! = 288$ cách xếp.</p>	0,25
<p>Suy ra tổng số cách xếp là $A = 5! \times (240 + 288) = 63360$ cách xếp.</p>	0,25
<p>Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{63360}{10!} = \frac{11}{630}$.</p>	0,25
<p>2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $AM = AN$ (M, N không trùng với các đỉnh của tam giác). Đường thẳng d_1 đi qua A và vuông góc với BN cắt cạnh BC tại $H\left(\frac{6}{5}; -\frac{2}{3}\right)$, đường thẳng d_2 đi qua M và vuông góc với BN cắt cạnh BC tại $K\left(\frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết rằng đỉnh A thuộc đường thẳng $(\Delta): 5x + 3y + 13 = 0$ và có hoành độ dương.</p>	2,0
	
<p>Gọi D là điểm sao cho $ABDC$ là hình vuông và E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng AH, MK với đường thẳng CD.</p> <p>Ta có $\triangle ABN = \triangle CAE (g.c.g) \Rightarrow AN = CE \Rightarrow AM = CE$ mà $AM = EF \Rightarrow CE = EF$ $\Rightarrow E$ là trung điểm của $CF \Rightarrow H$ là trung điểm của KC</p>	0,50
<p>Từ đó tìm được $C(2; -2)$. Ta có $\overrightarrow{KH}\left(\frac{4}{5}; -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của BC là $\vec{n}(5; 3)$ \Rightarrow Phương trình BC là: $5x + 3y - 4 = 0$.</p>	0,25
<p>Ta có AC là đường thẳng đi qua C và tạo với BC một góc 45°.</p> <p>Gọi vectơ pháp tuyến của AC là $\vec{n}_1(a; b)$, với $a^2 + b^2 > 0$.</p> <p>Ta có $\cos 45^\circ = \frac{ 5a + 3b }{\sqrt{34} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow 4b^2 - 15ba - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ b = -\frac{1}{4}a \end{cases}$</p>	0,25
<p>• Với $b = 4a$ chọn $a = 1 \Rightarrow b = 4$ ta có phương trình $AC: x + 4y + 6 = 0$</p>	0,25

	<p>Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+4y+6=0 \\ 5x+3y+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ (loại).</p>	
	<p>• Với $b = -\frac{1}{4}a$, chọn $a=4 \Rightarrow b=-1$ ta có phương trình</p> <p>$AC: 4x - y - 10 = 0$</p> <p>Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x - y - 10 = 0 \\ 5x + 3y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases}$ (thoả mãn) $\Rightarrow A(1; -6)$</p>	0,25
	<p>Phương trình AB là: $x + 4y + 23 = 0$.</p> <p>Toạ độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 4y + 23 = 0 \\ 5x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-7 \end{cases}$ (thoả mãn) $\Rightarrow B(5; -7)$</p> <p>Vậy toạ độ các điểm cần tìm là: $A(1; -6), B(5; -7), C(2; -2)$.</p> <p>Chú ý 5: Nếu học sinh công nhận điểm H là trung điểm của KC (không chứng minh) và tìm đúng toạ độ các đỉnh của tam giác thì <u>chỉ cho tối đa 1,0 điểm</u>.</p>	0,50
V 4,0 điểm	<p>1. Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng biểu thức $T = \frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'}$ có giá trị không đổi.</p>	2,0
		
	<p>Vì G là trọng tâm tứ diện $SABC$ nên ta có tính chất: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$, với M là điểm tùy ý.</p> <p>Áp dụng tính chất trên cho điểm $M \equiv S$ ta có:</p> $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{SS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$	0,50
	<p>Lại có $\overrightarrow{SA} = \frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SB} = \frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC} = \frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$</p>	0,50
	<p>Do đó $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{4SA'}\overrightarrow{SA'} + \frac{1}{4SB'}\overrightarrow{SB'} + \frac{1}{4SC'}\overrightarrow{SC'}$</p>	0,50
	<p>Vì bốn điểm A', B', C', G đồng phẳng nên phải có $\frac{1}{4SA'} + \frac{1}{4SB'} + \frac{1}{4SC'} = 1 \Rightarrow T = 4$.</p>	0,50
	<p>2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một điểm M đi động trên cạnh đáy BC (M khác B, C). Mặt phẳng (α) đi qua M đồng thời song song với hai đường thẳng SB, AC. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (α) và tìm vị trí điểm M để thiết diện đó có diện tích lớn nhất.</p>	2,0



Kẻ $MN \parallel AC$ ($N \in AB$); $NP \parallel SB$ ($P \in SA$); $MQ \parallel SB$ ($Q \in SC$).

Gọi $O = AC \cap BD$; $E = MN \cap BD$; $F = PQ \cap SO$; $R = EF \cap SD$.

Khi đó thiết diện cần tìm là ngũ giác $MNPRQ$, trong đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

0,50

Gọi α là góc giữa SB và AC .

Đặt $x = \frac{BM}{BC}$ ($0 < x < 1$). Khi đó $MN = x.AC$, $MQ = (1-x).SB$.

0,50

Suy ra $S_{MNPQ} = MN.MQ.\sin \alpha = x(1-x).SB.AC.\sin \alpha$.

Gọi I là trung điểm của SD , khi đó: $\frac{RF}{OI} = \frac{SF}{SO} = \frac{BE}{BO} = \frac{BM}{BC} = x \Rightarrow RF = x.OI = \frac{x}{2} SB$

Do góc giữa RE và PQ bằng α nên

$$S_{PRQ} = \frac{1}{2} PQ.RF.\sin \alpha = \frac{1}{2} MN.RF.\sin \alpha = \frac{x^2}{4} SB.AC.\sin \alpha$$

0,50

$$\text{Vậy } S_{MNPRQ} = S_{MNPQ} + S_{PRQ} = x \left(1 - \frac{3x}{4} \right) .SB.AC.\sin \alpha \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{3x}{4} \left(1 - \frac{3x}{4} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{4} + 1 - \frac{3x}{4} \right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x \left(1 - \frac{3x}{4} \right) \leq \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ } (*) \text{ suy ra } S_{MNPRQ} \leq \frac{1}{3} .SB.AC.\sin \alpha.$$

0,50

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{3x}{4} = 1 - \frac{3x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ hay } \frac{MB}{MC} = 2.$$

----- Hết -----

Chú ý:

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.
- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH CẤP THPT
HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2016 - 2017

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 1 trang, gồm 5 câu)

Môn: TOÁN - Lớp: 11
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1.

a) Giải phương trình $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sqrt{3} \sin x} = 2 \left(\cot 2x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

b) Mỗi lượt, ta gieo một con súc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con súc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

Câu 2.

a) Tính $\mathbb{L} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+4x}}{1+x-\sqrt{1+2x}}$.

b) Tìm số đo các góc của tam giác ABC sao cho biểu thức

$$\mathbb{P} = \sin^2 A + \cos B + \cos^2 C$$

đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Hình chiếu của B' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng CD và ABB' là tam giác vuông cân.

a) Tính độ dài đoạn thẳng $A'D$.

b) Tính $\cos \alpha$ với α là góc giữa hai đường thẳng BH và AC' .

Câu 4. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz = 2(xy + yz + zx)$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathbb{P} = x(1-y)(1-z).$$

Câu 5. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 2017 \text{ và } x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 3}{4} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i + 1} + \frac{2}{x_i^2 + 1} \right)$.

Chứng minh dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

HẾT

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

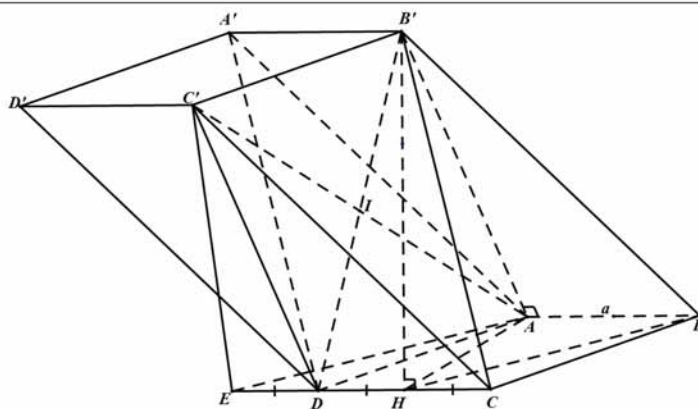
HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu	Đáp án
1.a.	$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sqrt{3} \sin x} = 2 \left(\cot 2x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$ <p>Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với</p> $\frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{\sqrt{3} \sin x \cos x} = 2 \left(\frac{\cos 2x}{2 \sin x \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ $\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$ $\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$ <p>Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm của phương trình đã cho là</p> $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$ <p>Ta có thể biến đổi phương trình đã cho về dạng</p> $(2 \cos x + \sqrt{3})(\sqrt{3} \cos x - \sin x - 1) = 0.$
1.b.	<p>Số phần tử của không gian mẫu là $\Omega = (6.2)^3 = 1728$.</p> <p>Số trường hợp xảy ra để cả 3 lượt tung đó đều thu được súc sắc mặt 1 chấm và xu sắp là 1. Số trường hợp xảy ra để trong 3 lượt tung đó có đúng 2 lượt được súc sắc mặt 1 chấm và xu sắp là $3.1.1.11 = 3.11$.</p> <p>Số trường hợp xảy ra để trong 3 lượt tung đó có đúng 1 lượt được súc sắc mặt 1 chấm và xu sắp là $3.1.11.11 = 3.11^2$.</p> <p>Vậy xác suất cần tìm là</p> $P = \frac{1 + 3.11 + 3.11^2}{12^3} = \frac{397}{1728}.$ <p>Ngoài cách giải trên, ta còn có thể giải theo hướng</p> $P = 1 - \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \right)^3 = 1 - \frac{11^3}{12^3}.$

2.a.	<p>Ta có</p> $ \begin{aligned} \mathbb{L} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+4x}}{1+x-\sqrt{1+2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+4x}}{x^2} (1+x+\sqrt{1+2x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x} - (1+2x) + (1+2x) - \sqrt{1+4x}}{x^2} (1+x+\sqrt{1+2x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}(\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}) + \frac{4x^2}{1+2x+\sqrt{1+4x}}}{x^2} (1+x+\sqrt{1+2x}) \end{aligned} $ <p>Ta có</p> $ \begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}(\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}(\sqrt[3]{1+3x} - (1+x) + 1+x - \sqrt{1+2x})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+2x} \left(\frac{1}{1+x+\sqrt{1+2x}} - \frac{3+x}{\sqrt[3]{1+3x}^2 + \sqrt[3]{1+3x}(1+x) + (1+x)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} $ <p>Do vậy $\mathbb{L} = \left(\frac{-1}{2} + 2 \right) \cdot 2 = 3$.</p> <p>Ta cũng có thể tính như sau</p> $ \begin{aligned} \mathbb{L} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+4x}}{1+x-\sqrt{1+2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt[3]{1+3x}-1) + \sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} - 1 - \sqrt{1+4x}}{x^2} (1+x+\sqrt{1+2x}). \end{aligned} $ <p>Ta có</p> $ \begin{aligned} \mathbb{L}_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+\sqrt{1+2x}) = 2. \\ \mathbb{L}_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt[3]{1+3x}-1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{(\sqrt{1+2x}+1)(\sqrt[3]{1+3x}^2 + \sqrt[3]{1+3x}+1)} = 1. \\ \mathbb{L}_3 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} - 1 - \sqrt{1+4x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x) + \sqrt[3]{1+3x} - (1+x) + (1+2x) - \sqrt{1+4x}}{x^2} \end{aligned} $
------	---

	$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{\sqrt{1+2x+1+x}} + \frac{-3-x}{A^2 + A(1+x) + (1+x)^2} + \frac{4}{1+2x+\sqrt{1+4x}} \right)$ $= \frac{-1}{2} + \frac{-3}{3} + \frac{4}{2} = \frac{1}{2}.$ <p>(trong đó $A = \sqrt[3]{1+3x}$).</p> <p>Do vậy $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1(\mathbb{L}_2 + \mathbb{L}_3) = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 3.$</p>
2.b.	<p>Ta có</p> $\begin{aligned} \mathbb{P} &= \sin^2 A + \cos B + \cos^2 C \\ &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2C}{2} + \cos B \\ &= 1 + \sin B \sin(A - C) + \cos B \\ &\leq 1 + \sin B + \cos B \\ &= 1 + \sqrt{2} \cos \left(B - \frac{\pi}{4} \right) \\ &\leq 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$ <p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi</p> $\begin{cases} \sin(A - C) = 1 \\ \cos \left(B - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{\pi}{4} \\ A - C = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{5\pi}{8}, B = \frac{\pi}{4}, C = \frac{\pi}{8}.$ <p>Vậy $A = \frac{5\pi}{8}, B = \frac{\pi}{4}, C = \frac{\pi}{8}.$</p> <p>Ta cũng có thể đại số hóa như sau:</p> <p>Đặt $\cos A = x, \cos B = y, \cos C = z$ thì $x, y, z \in (-1, 1)$ và $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Suy ra</p> $(y + zx)^2 = 1 - x^2 - z^2 + z^2 x^2 = (1 - x^2)(1 - z^2) \Rightarrow y + zx \leq \sqrt{(1 - x^2)(1 - z^2)}.$ <p>Khi đó, áp dụng Bất đẳng thức Bunhiacốpski ta được</p> $y \leq \sqrt{(1 - z^2)(1 - x^2)} - xz \leq \sqrt{(1 - z^2 + x^2)(1 - x^2 + z^2)} = \sqrt{1 - (z^2 - x^2)^2}.$ <p>Do vậy</p> $\mathbb{P} = 1 - x^2 + y + z^2 \leq 1 + y + \sqrt{1 - y^2} \leq 1 + \sqrt{2(y^2 + 1 - y^2)} = 1 + \sqrt{2}.$ <p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi</p> $\begin{cases} y + zx = \sqrt{(1 - x^2)(1 - z^2)} \\ \frac{-x}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{z}{\sqrt{1 - x^2}} \geq 0 \\ y = \sqrt{1 - y^2} = z^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \leq 0 \leq z \\ z^2 = x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, zx \geq \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ (z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - 1) = 0 \\ x^2 + z^2 + \sqrt{2}xz = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}. \end{cases}$ <p>Khi đó $A = \arccos \frac{-\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, B = \frac{\pi}{4}, C = \arccos \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$</p>

3.a.



Ta có $\widehat{CAD} = \frac{1}{2} \widehat{BAD} = 60^\circ$ nên ACD là tam giác đều.

Suy ra $AH \perp CD$ nên $AH \perp AB$. Lại có $B'H \perp AB$ (do $B'H \perp (ABCD)$) nên $AB \perp (A'B'H)$. Suy ra $AB \perp A'B'$ hay tam giác ABB' vuông tại A .

Theo giả thiết tam giác ABB' vuông cân nên $AB' = AB = a$.

$$\text{Suy ra } B'H = \sqrt{B'A'^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Do vậy } A'D = B'C = \sqrt{B'H^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Có thể lý luận $BB' > BH > BA$ kết hợp ABB' là tam giác vuông cân suy ra tam giác ABB' vuông cân tại A . Suy ra $AB' = AB = a$, sau đó tính tiếp như trên.

3.b.

Lấy điểm E thuộc đường thẳng CD sao cho $AE \parallel BH$.

Khi đó α bằng góc giữa 2 đường thẳng AE và AC' .

Ta có $ABHE$ là hình bình hành nên

$$AE = BH = \sqrt{HA^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Ta có } EC' = \sqrt{EA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{B'H^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Gọi I là tâm của hình bình hành $ADC'B'$.

$$\text{Ta có } AC' = 2AI = \sqrt{2(AD^2 + AB'^2) - B'D^2} = \sqrt{2(a^2 + a^2) - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Do đó } \cos \widehat{EAC'} = \frac{7a^2 + 14a^2 - 5a^2}{2 \cdot 7a^2 \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{7} > 0. \text{ Vậy } \cos \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

Ta có thể giải bằng phương pháp vectơ như sau:

$$\text{Đặt } \overrightarrow{HA} = \vec{x}, \overrightarrow{HC} = \vec{y}, \overrightarrow{HB'} = \vec{z} \text{ thì } |\vec{x}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, |\vec{y}| = \frac{a}{2}, |\vec{z}| = h > 0. \text{ và } \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0.$$

Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = 2\vec{y}(\vec{z} - \vec{x}) = 0$ nên từ giả thiết ta có

$$|2\vec{y}| = |\vec{z} - \vec{x}| \Leftrightarrow a = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow h = \frac{a}{2} > 0.$$

	<p>a) Do vậy $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'H} + \overrightarrow{HD} = 2\vec{y} - \vec{z} - \vec{y} = \vec{y} - \vec{z}$ nên</p> $A'D = \sqrt{ \vec{y} ^2 - 2\vec{y}\vec{z} + \vec{z} ^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$ <p>b) Ta cũng có $\overrightarrow{BH} = -\vec{x} - 2\vec{y}$ nên $BH = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + 4 \cdot \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$</p> <p>Mặt khác</p> $\begin{aligned}\overrightarrow{AC'} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{BC} \\ &= -\vec{x} + \vec{z} - (\vec{x} + 2\vec{y}) + \vec{y} \\ &= -2\vec{x} - \vec{y} + \vec{z}.\end{aligned}$ <p>Suy ra $AC' = \sqrt{4 \cdot \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$</p> <p>Do vậy</p> $\cos \alpha = \cos(BH, AC') = \frac{ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC'} }{BH \cdot AC'} = \frac{ (\vec{x} + 2\vec{y})(2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}) }{\frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2}} = \frac{\left 2 \frac{3a^2}{4} + 2 \frac{a^2}{4}\right }{\frac{7a^2\sqrt{2}}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}.$
	<p>Ta có $x^2 + (y+z)^2 - 4yz - 2x(y+z) + 4xyz = 0.$</p> <p>Do đó $4yz(1-x) = (y+z-x)^2 \geq 0.$ Suy ra $x \leq 1.$ Tương tự $y, z \leq 1.$</p> <p>Do vậy $x, y, z \in (0, 1].$</p> <p>Viết lại giả thiết thành $x^2 + 2x(2yz - y - z) + y^2 + z^2 - 2yz = 0.$</p> <p>Do $\Delta'_x = 4yz(1-y)(1-z) \geq 0$ nên $x = y + z - 2yz \pm 2\sqrt{yz(1-y)(1-z)}.$</p> <p>Suy ra</p> $x \leq y + z - 2yz + 2\sqrt{yz(1-y)(1-z)} = \left(\sqrt{y}\sqrt{1-z} + \sqrt{z}\sqrt{1-y}\right)^2.$ <p>Nếu $(1-y)(1-z) = 0$ thì $\mathbb{P} = 0.$ Nếu $(1-y)(1-z) > 0$ thì $0 < y, z < 1.$</p> <p>Khi đó đặt $y = \sin^2 B, z = \sin^2 C \left(B, C \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ thay vào biến đổi ta được</p> $x \leq \sin^2(B+C) = \sin^2 A$ <p>với A, B, C là 3 góc của một tam giác.</p> <p>Suy ra</p> $\mathbb{P} \leq \sin^2 A \cos^2 B \cos^2 C.$ <p>Ta có</p> $\begin{aligned}\mathbb{P} &\leq (\sin A \cos B \cos C)^2 \\ &= \sin^2 A \left(\frac{\cos(B-C) - \cos A}{2}\right)^2 \leq \sin^2 A \left(\frac{1 - \cos A}{2}\right)^2 \\ &= \sin^2 A \sin^4 \frac{A}{2} = 4 \sin^6 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}\end{aligned}$

4.

$$(\text{do } 0 < \cos B \cdot \cos C = \frac{\cos(B-C) - \cos A}{2} \leq \frac{1 - \cos A}{2}).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &\leq 4 \left(1 - \cos^2 \frac{A}{2} \right)^3 \cos^2 \frac{A}{2} \\ &\leq \frac{4}{3} 3 \cos^2 \frac{A}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{A}{2} \right)^3 \leq \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^4 = \frac{27}{64}. \end{aligned}$$

Khi $x = \frac{3}{4}, y = z = \frac{1}{4}$ thì $\mathbb{P} = \frac{27}{64}$. Vậy giá trị lớn nhất của \mathbb{P} là $\frac{27}{64}$.

Ta có thể chứng minh $x, y, z \in (0, 1]$ như sau:

Viết lại giả thiết thành $x^2 + 2x(2yz - y - z) + y^2 + z^2 - 2yz = 0$.

Do đó $\Delta'_x \geq 0 \Rightarrow (y-1)(z-1) \geq 0$. Tương tự ta có $(z-1)(x-1) \geq 0, (x-1)(y-1) \geq 0$.

Suy ra x, y, z cùng nhỏ hơn hoặc bằng 1 hoặc cùng lớn hơn hoặc bằng 1.

Nếu $x, y, z \geq 1$ thì

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz \geq xy + yz + zx + xy + yz + zx + xyz > 2(xy + yz + zx), \text{ vô lý.}$$

Vậy $x, y, z \in (0, 1]$.

Từ $\sqrt{x} \leq \sqrt{y(1-z)} + \sqrt{z(1-y)}$ ta có thể đánh giá tiếp bằng Bất đẳng thức Côsi như sau:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &\leq (1-y)(1-z) \left(\sqrt{y(1-z)} + \sqrt{z(1-y)} \right)^2 \\ &= (1-y-z+yz) \left(y+z-2yz + \frac{2\sqrt{3y(1-y)} \cdot 2\sqrt{3z(1-z)}}{6} \right) \\ &\leq (1-y-z+yz) \left(y+z-2yz + \frac{(2y+1)(2z+1)}{6} \right) \\ &= \frac{4}{3} (1-y-z+yz) \left(y+z-yz + \frac{1}{8} \right) \\ &\leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{8} \right)^2 = \frac{27}{64}. \end{aligned}$$

Ta cũng có thể đánh giá tiếp bằng Bất đẳng thức Bunhiacốpski như sau:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &\leq (1-y)(1-z) \left(\sqrt{y(1-z)} + \sqrt{z(1-y)} \right)^2 \\ &\leq (1-y-z+yz)(y+z)(2-y-z) \\ &\leq \left(1-y-z + \frac{(y+z)^2}{4} \right) (y+z)(2-y-z) \\ &= \frac{1}{4} (y+z)(2-y-z)^3 \\ &= \frac{1}{12} (3y+3z)(2-y-z)^3 \leq \frac{1}{12} \left(\frac{6}{4} \right)^4 = \frac{27}{64}. \end{aligned}$$

5.

Ta có $x_{n+1} - 1 = \frac{x_n^4 - 1}{4} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)(x_n^2 + 1)}{4}; \forall n \geq 1.$

Kết hợp với $x_1 = 2017$ ta có ngay $x_n > 2017, \forall n \geq 2.$

Ta có $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^4 - 4x_n + 3}{4} = \frac{(x_n - 1)^2(x_n^2 + 2x_n + 3)}{4}; \forall n \geq 1.$

Do đó $x_{n+1} - x_n > 0; \forall n \geq 1.$ Suy ra (x_n) là dãy tăng ngặt.

Giả sử (x_n) bị chặn trên suy ra (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim x_n = L$ thì $L \geq 2017.$

Ta có

$$L = \frac{L^4 + 3}{4} \Leftrightarrow L^4 - 4L + 3 = 0 \Leftrightarrow (L - 1)^2(L^2 + 2L + 3) = 0 \Leftrightarrow L = 1, \text{ vô lý.}$$

Do vậy $\lim x_n = +\infty.$

Ta có $\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n^2 + 2x_n + 3)}{(x_n + 1)(x_n^2 + 1)}; \forall n \geq 1.$

Do đó

$$\frac{1}{x_n + 1} + \frac{2}{x_n^2 + 1} = \frac{x_n^2 + 2x_n + 3}{(x_n + 1)(x_n^2 + 1)} = \frac{x_{n+1} - x_n}{(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}; \forall n \geq 1.$$

Do đó $y_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i - 1} - \frac{1}{x_{i+1} - 1} \right) = \frac{1}{2016} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}; \forall n \geq 1.$

Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_{n+1} - 1} = 0$ nên dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{1}{2016}.$

----- HẾT -----

Câu 1 (3,0 điểm). Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi

$$x_0 = 1; x_1 = 2017 \text{ và } x_{n+1} = \frac{nx_n^2}{1 + (n+1)x_n} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = nx_n$ và $z_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k-1}}$.

a. Chứng minh rằng (y_n) là dãy số giảm.

b. Tìm giới hạn của dãy (z_n) .

Câu 2 (2,0 điểm). Cho ba số thực $a, b, c > 2$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c - 8$.

Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq 9 \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)}.$$

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi D là trung điểm cạnh AC và M là trung điểm cạnh BC . Đoạn thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại điểm E . Đường thẳng BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại điểm F khác B . Đường thẳng AF cắt đường thẳng BE tại I , đường thẳng CI cắt đường thẳng BD tại K .

a. Chứng minh rằng $DA = DF$.

b. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK .

Câu 4 (1,0 điểm). Một số nguyên dương a được gọi là số k -phương ($k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2$) nếu tồn tại số nguyên dương b sao cho $a = b^k$. Cho cấp số cộng $(a_n)_{n \geq 0}$ với các số hạng là số nguyên dương và có công sai bằng 2017. Biết rằng có hai số hạng a_m và a_n của cấp số cộng tương ứng là số i -phương và số j -phương, trong đó $(i, j) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại một số hạng của cấp số cộng là số ij -phương.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho S là một số nguyên dương sao cho S chia hết cho tất cả các số nguyên dương từ 1 đến 2017. Xét k số nguyên dương a_1, a_2, \dots, a_k (không nhất thiết phân biệt) thuộc tập hợp $\{1, 2, \dots, 2017\}$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 2S$. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra từ các số a_1, a_2, \dots, a_k một vài số sao cho tổng của chúng bằng S .

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	a (2,0 điểm)	
	Ta thấy ngay $x_n > 0, \forall n \geq 0$.	0,5
	Ta có $y_n - y_{n+1} = nx_n - (n+1)x_{n+1} = nx_n - \frac{n(n+1)x_n^2}{1+(n+1)x_n} = \frac{nx_n}{1+(n+1)x_n} > 0, \forall n \geq 1$.	1,0
	Suy ra dãy (y_n) giảm.	0,5
	b (1,0 điểm)	
	Dãy (y_n) giảm và $y_n > 0, \forall n$ nên (y_n) hội tụ. Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a \geq 0$.	0,25
	Ta có $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - y_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx_n}{1+(n+1)x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx_n}{1+\frac{n+1}{n}(nx_n)} = \frac{a}{1+a}$. Do đó $a = 0$.	
	Từ giả thiết suy ra $x_{n+1} + (n+1)x_n x_{n+1} = nx_n^2 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = nx_n - (n+1)x_{n+1}$.	0,25
	Do đó $z_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{x_1}{x_0} + \sum_{k=2}^n \frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{x_1}{x_0} + x_1 - nx_n = 4034 - y_n, \forall n \geq 1$.	0,25
	Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 4034$.	0,25
2	(2,0 điểm)	
	Đặt $x = a + b + c$. Ta có $a + b + c - 8 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow x - 8 \geq \frac{9}{x}$.	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9$. Vậy bất đẳng thức thứ nhất được chứng minh.	0,5
	Ta có $2x - 16 = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \Rightarrow \frac{a-2}{a} + \frac{b-2}{b} + \frac{c-2}{c} = 19 - 2x$ (1) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwazt ta được: $\frac{a-2}{a} + \frac{b-2}{b} + \frac{c-2}{c} \geq \frac{[(a-2)+(b-2)+(c-2)]^2}{a(a-2)+b(b-2)+c(c-2)} = \frac{(x-6)^2}{a^2+b^2+c^2-2x}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $19 - 2x \geq \frac{(x-6)^2}{a^2+b^2+c^2-2x} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 2x + \frac{(x-6)^2}{19-2x}$ (3).	0,25
	BĐT thứ hai tương đương với $ab+bc+ca \leq 27 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \leq 54$ $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq x^2 - 54.$	0,25

	<p>Ta cần chứng minh $2x + \frac{(x-6)^2}{19-2x} \geq x^2 - 54$ (4). Thật vậy (4) $\Leftrightarrow (x-9)(x^2 - 2x - 59) \geq 0$.</p> <p>BĐT này luôn đúng do $x \geq 9$. Từ (3) và (4) ta có điều phải chứng minh.</p> <p>Đẳng thức xảy ra ở cả hai BĐT khi $a = b = c = 3$.</p>	0,25
3 (3,0 điểm)		
3a (1,5 điểm)		
Do tứ giác ABFE nội tiếp nên $AFD = 180^\circ - AFB = 180^\circ - AEB = BEM$ (1)		0,5
Mặt khác do AM là trung trực của BC và tứ giác BEDC nội tiếp nên		
$BEM = \frac{1}{2}BEC = \frac{1}{2}BDC$ (2)		0,5
Từ (1) và (2) suy ra $AFD = \frac{1}{2}BDC \Rightarrow AFD = DAF$. Vậy tam giác DAF cân tại D, tức là $DA = DF$.		0,5
3b (1,5 điểm)		
Dễ thấy do tam giác ABC cân nên đường tròn ngoại tiếp BCD đi qua trung điểm D' của AB. Từ đó hai cung ED và ED' bằng nhau, suy ra BE là phân giác của góc ABD (3).		0,25
Áp dụng định lý Mênelaus cho tam giác ADF và cát tuyến CIK ta được:		
$\frac{CA}{CD} \cdot \frac{KD}{KF} \cdot \frac{IF}{IA} = 1$		0,5

	<p>Mà $CA = 2CD$ và BI là phân giác góc ABF nên $\frac{IF}{IA} = \frac{BF}{BA}$. Từ đó ta được</p> $1 = 2 \cdot \frac{KD}{KF} \cdot \frac{BF}{AB} = 2 \cdot \frac{KD}{KF} \cdot \frac{BF}{2AD} = \frac{KD}{KF} \cdot \frac{BF}{AD}.$	
	<p>Suy ra $\frac{BF}{AD} = \frac{KF}{KD}$, do đó $\frac{BD}{AD} = \frac{BF + FD}{AD} = \frac{BF}{AD} + 1 = \frac{KF}{KD} + 1 = \frac{DF}{DK} = \frac{AD}{DK}$</p> <p>Từ đó suy ra hai tam giác ADK và BDA đồng dạng, suy ra $DAK = ABD$</p>	0,5
	<p>Khi đó $IAB = AFD - ABD = DAF - DAK = IAK$, suy ra AI là phân giác góc BAK (4).</p> <p>Từ (3) và (4) suy ra I là tâm nội tiếp tam giác ABK.</p>	0,25
4	(1,0 điểm)	
	<p>Theo giả thiết, ta có $a_m = x^i, a_n = y^j$ ($i, j \geq 2$); x, y nguyên dương. Đặt $p = 2017$ là công sai của cấp số cộng (a_n), ta thấy p là số nguyên tố.</p> <p>Ta có $a_m = a_0 + mp \Rightarrow a_0 \equiv a_m \equiv x^i \pmod{p}$, tương tự $a_0 \equiv y^j \pmod{p}$</p>	0,25
	<p>Do $(i, j) = 1$ nên tồn tại $u, v \in \mathbb{Z}$ sao cho $ui + vj = 1$. Chọn các số nguyên dương r, s sao cho $r \equiv u \pmod{p-1}, s \equiv v \pmod{p-1}$, khi đó $ri + sj \equiv ui + vj \equiv 1 \pmod{p-1}$</p>	0,25
	<p>Suy ra $ri + sj = 1 + k(p-1), k \in \mathbb{Z}^+$. Do đó:</p> $(x^s y^r)^{ij} = (x^i)^{sj} \cdot (y^j)^{ri} \equiv a_0^{sj} \cdot a_0^{ri} = a_0^{ri+sj} = a_0^{1+k(p-1)} \equiv a_0 \pmod{p}$	0,25
	<p>Như vậy tồn tại số nguyên dương h sao cho $(x^s y^r)^{ij} = a_0 + hp = a_h$.</p> <p>Vậy a_h là số ij-phương (đpcm).</p>	0,25
5	(1,0 điểm)	
	<p>Do S chia hết cho 2015, 2016, 2017 nên $S \geq 2015 \cdot 2016 \cdot 2017$</p> <p>Giả sử mỗi số nguyên $1, 2, 3, \dots, 2017$ xuất hiện nhiều nhất 2015 lần trong các số a_1, a_2, \dots, a_k thì $2S \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq 2015(1 + 2 + 3 + \dots + 2017) < 2015 \cdot 2016 \cdot 2017$, mâu thuẫn. Do đó tồn tại một số $a \in \{1, 2, 3, \dots, 2017\}$ xuất hiện ít nhất 2016 lần trong các số a_1, a_2, \dots, a_k.</p>	0,25
	<p>Ta để 2016 số a vào một tập A. Xét $k - 2016$ số còn lại, ta để các số này vào một tập B. Tổng các số trong B là</p> $a_1 + a_2 + \dots + a_k - 2016a \geq 2S - 2016a \geq 2S - 2016 \cdot 2017 > S.$ <p>Nếu $k - 2016 \leq a$ thì $k \leq 2016 + 2017 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq (2016 + 2017) \cdot 2017 < 2S$, mâu thuẫn, suy ra $k - 2016 > a$. Từ tập B ta chọn ra a số bất kì là b_1, b_2, \dots, b_a.</p> <p>- Nếu tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, a\}$ mà $(b_1 + b_2 + \dots + b_i) : a$ thì ta chọn i số này vào một tập hợp T.</p> <p>- Nếu ngược lại thì theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại $i < r$ sao cho</p>	0,25

	$b_1 + b_2 + \dots + b_i \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_r \pmod{a}, \text{ suy ra } (b_{i+1} + b_{i+2} + \dots + b_r) : a.$ <p>Khi đó ta chọn $(r-i)$ số này vào tập T.</p>	
	<p>Như vậy ta luôn chọn được một số vào tập T mà có tổng chia hết cho a. Ta tiếp tục làm như vậy với các số còn lại của tập B để bổ sung thêm các phần tử vào T cho đến khi tổng các số trong T (kí hiệu $\sum T$) lớn hơn $S - 2017a$ thì dừng lại.</p> <p>Thật vậy, nếu $\sum T \leq S - 2017a$ thì tổng các số còn lại trong B sẽ lớn hơn hoặc bằng</p> $2S - 2016a - (S - 2017a) = S + a > 2017a$ <p>,tức là vẫn còn ít nhất a số để thực hiện thao tác.</p>	0,25
	<p>Như vậy, ta đã xây dựng được tập hợp T thỏa mãn hai điều kiện:</p> $(\sum T) : a \text{ và } \sum T > S - 2017a$ <p>Chú ý là $S : a$ nên ta được $\sum T \geq S - 2017a + a \Rightarrow \sum T \geq S - 2016a$</p> <p>Do đó $\sum T = S - ma$ với $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2016\}$. Đến lúc này ta chỉ cần bổ sung m số a từ tập A vào T thì ta sẽ được tổng các phần tử trong T bằng S (đpcm).</p>	0,25

-----Hết-----

Đề chính thức
(Gồm có 01 trang)

(Thời gian làm bài: 120 phút, không kể giao đề)

Câu 1 (3,0 điểm)

Giải phương trình: $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + (2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x = 1 + \sqrt{3}$.

Câu 2 (3,0 điểm)

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (x là ẩn và m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm không âm x_1, x_2 . Tính theo m giá trị của biểu thức $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 3 (4,0 điểm) 1. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm):

Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần.

Câu 5 (3,0 điểm):

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(-1;-1)$ và đường tròn (T) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$. Gọi B, C là hai điểm phân biệt thuộc (T). Viết phương trình đường thẳng BC biết rằng $I(1;1)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 6 (4,0 điểm):

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AD, BB', C'D'$. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, tính theo a diện tích thiết diện đó.

-----Hết-----

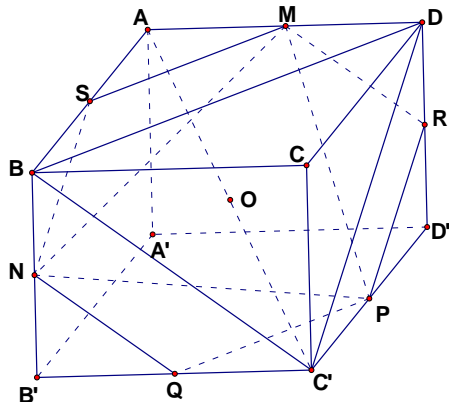
Họ và tên thí sinhSBD:

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm, TS không dùng MTBT)

(Thời gian làm bài: 120 phút, không kể giao đề)

Câu	Nội dung	Điểm
1	Ta có $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + (2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x = 1 + \sqrt{3}$	
	$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x - \cos x + \sqrt{3}(1 - 2 \sin^2 x) + (2 + \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} - 1 = 0$	
	$\Leftrightarrow \cos x(2 \sin x - 1) - (2 \sin x - 1)(\sqrt{3} \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\cos x - \sqrt{3} \sin x + 1) = 0$	
	$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$	1,0
	+) $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	1,0
	+) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	1,0
	Vậy phương trình đã cho có các họ nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	
2	*) Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (1) có hai nghiệm không âm	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m^2 + 2m - 4 \geq 0 \\ S = 2m \geq 0 \\ P = m^2 - 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$	1,5
	*) Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = m^2 - 2m + 4$. Do đó $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}}$ Do $m \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq \sqrt{8}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$.	1,5
3.1	Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3$ (1) *) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$ Khi đó (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 1) + (\sqrt{5x+4} - 2) = 3x^2 - x$ $\Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} + \frac{5x}{\sqrt{5x+4}+2} = x(3x-1)$	0,5
		0,5

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0(TM) \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1} + \frac{5}{\sqrt{5x+4}+2} = 3x-1 (*) \end{cases}$ <p>+ Với $x=1$: VT(*)=2=VP(*) nên $x=1$ là một nghiệm của (*)</p> <p>+ Nếu $x>1$ thì VT(*)<2<VP(*), + Nếu $x<1$ thì VT(*)>2>VP(*).</p> <p>Vậy (1) có 2 nghiệm $x=0$; $x=1$</p>	0,5
3.2	<p>2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases} \quad (2)$</p> <p>*) Ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y) + xy(x^2 - y) + xy = 1 \\ (x^2 - y)^2 + xy = 1 \end{cases}$</p> <p>Đặt $\begin{cases} a = x^2 - y \\ b = xy \end{cases}$. Hệ trở thành: $\begin{cases} a + ab + b = 1 \\ a^2 + b = 1 \end{cases} \quad (3)$</p> <p>*) Hệ (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 2a = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + a - 2) = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases}$</p> <p>Từ đó tìm ra $(a; b) \in \{(0; 1); (1; 0); (-2; -3)\}$</p> <p>*) Với $(a; b) = (0; 1)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$</p> <p>Với $(a; b) = (1; 0)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (0; -1); (1; 0); (-1; 0).$</p> <p>*) Với $(a; b) = (-2; -3)$ ta có hệ</p> $\begin{cases} x^2 - y = -2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ x^3 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ (x+1)(x^2 - x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1; y = 3.$ <p>*) Kết luận: Hệ có 5 nghiệm $(x; y) \in \{(1; 1); (0; -1); (1; 0); (-1; 0); (-1; 3)\}.$</p>	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
4	<p>*) Có $9.10^3 = 9000$ số tự nhiên có 4 chữ số.</p> <p>*) Khi số 1 lặp lại 3 lần, có $C_4^3 = 4$ cách chọn vị trí cho số 1 và 9 cách chọn chữ số còn lại (bao gồm cả trường hợp số 0 đứng đầu)</p> <p>suy ra có $9.C_4^3 - 1 = 35$ số mà số 1 lặp lại đúng 3 lần (không kể số 0 đứng đầu).</p> <p>*) Tương tự với các chữ số 2, 3, ..., 8, 9 mỗi số cũng lặp lại đúng 3 lần</p> <p>Do đó có $35.9 = 315$ số.</p> <p>*) Khi số 0 lặp lại 3 lần, có 1 cách chọn vị trí cho 3 số 0 và 9 cách chọn cho chữ số còn lại (là số đứng đầu).</p> <p>Theo quy tắc cộng, có $315 + 9 = 324$ số mà có một chữ số lặp lại đúng 3 lần</p> <p>*) Vậy, số các số thỏa mãn yêu cầu là $9000 - 324 = 8676$ số.</p>	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
5	<p>*) Đường tròn (T) có tâm $K(3; 2)$, bán kính $R = 5$</p> <p>*) Đường thẳng AI đi qua hai điểm A và I có phương trình $x - y = 0$,</p> <p>AI cắt (T) tại hai điểm $A(-1; -1)$ và $A'(6; 6)$</p>	0,5 0,5

	<p>Ta có $A'B = A'C$ (1)</p> <p>và $\begin{cases} \widehat{ABI} = \widehat{IBC} \\ \widehat{A'BC} = \widehat{BAI} \end{cases} \Rightarrow \widehat{A'IB} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI} = \widehat{IBC} + \widehat{A'BC}$</p> <p>$\Rightarrow \Delta A'BI$ là tam giác cân tại $A' \Rightarrow A'B = A'I$ (2)</p> <p>*) Từ (1), (2) suy ra $A'B = A'I = A'C$ hay các điểm B, I, C thuộc đường tròn tâm A', bán kính $A'I$ có phương trình là $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 50$</p> <p>*) Tọa độ B, C thỏa mãn hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y = 12 \\ (x-6)^2 + (y-6)^2 = 50 \end{cases}$ (3)</p> <p>Giải hệ (3) ta tìm được $B(7;-1), C(-1;5)$ (hoặc $B(-1;5), C(7;-1)$)</p> <p>*) Do đó phương trình đường thẳng BC là $3x + 4y - 17 = 0$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
6	 <p>*) Gọi S là trung điểm của AB, khi đó $MS \parallel BD \Rightarrow MS \parallel mp(BC'D)$ và $NS \parallel C'D \Rightarrow NS \parallel mp(BC'D)$ suy ra $(MNS) \parallel (BC'D)$.</p> <p>*) Do $(MNS) \parallel BC'$ nên (MNS) cắt $(BCC'B')$ theo giao tuyến qua N song song với BC' cắt $B'C'$ tại Q.</p> <p>*) Do $(MNS) \parallel BD$ và $B'D'$ nên $mp(MNS)$ cắt $mp(A'B'C'D')$ theo giao tuyến qua Q song song với $B'D'$ cắt $D'C'$ tại P', do P' là trung điểm của $C'D'$ nên P' trùng với P.</p> <p>*) Do $(MNS) \parallel C'D$ nên (MNS) cắt $(CDD'C')$ theo giao tuyến qua P song song với $C'D$ cắt DD' tại R.</p> <p>*) Do đó thiết diện cắt bởi (MNP) và hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo một lục giác đều $MSNQPR$ cạnh $MR = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và có tâm là O suy ra:</p> $S_{MSNQPR} = 6S_{OMS} = 6 \cdot \frac{1}{2} OM \cdot OS \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}. \text{ Vậy } S_{MSNQPR} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	<p>1,0</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>1,0</p>

Ghi chú:

- 1) Thí sinh làm theo cách khác đáp án mà đúng thì cho điểm theo thành phần đã nêu.
- 2) Câu HHKG thí sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai cơ bản thì không chấm điểm

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Giải phương trình: $2(\sin x + 3)\cos^4 \frac{x}{2} - \sin x(1 + \cos x) - 3\cos x - 1 = 0.$

b) Giải bất phương trình: $(x+1)(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+2x+3}) > \sqrt{x^2+2} - 2x - 1$

Câu 2 (3,0 điểm).

Cho đa giác lồi (H) có 22 cạnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (H). Chọn ngẫu nhiên 2 tam giác trong X, tính xác suất để chọn được 1 tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác (H) và 1 tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H).

Câu 3 (2,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ n(n^2 - 1)u_n = u_1 + 2u_2 + \dots + (n-1)u_{n-1}, \quad \forall n > 1, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad \text{Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{2}(n^3 - n)u_n.$$

Câu 4 (5,0 điểm). Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Các điểm H, K lần lượt là trung điểm của AD, C'D'. Điểm M thuộc đoạn BC', N thuộc đoạn AB'. Đường thẳng MN tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc 45° .

a) Chứng minh rằng: $AK \perp BH$;

b) Chứng minh rằng: $MN \geq (2 - \sqrt{2})a$.

Câu 5 (2,0 điểm). Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC; đường thẳng AD là phân giác trong góc A. Trên đoạn AD lấy hai điểm M, N (M, N khác A và D) sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$. Đường thẳng CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tại điểm F; biết phương trình FA là $x + y - 8 = 0$ và $M(-3; -1), B(-4; -2)$. Xác định tọa độ điểm A biết đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC đi qua điểm $Q(0; \sqrt{22})$.

Câu 6 (2,0 điểm).

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{b}{c^2 + a^2 + 2} + \frac{c}{a^2 + b^2 + 2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

..... Hết

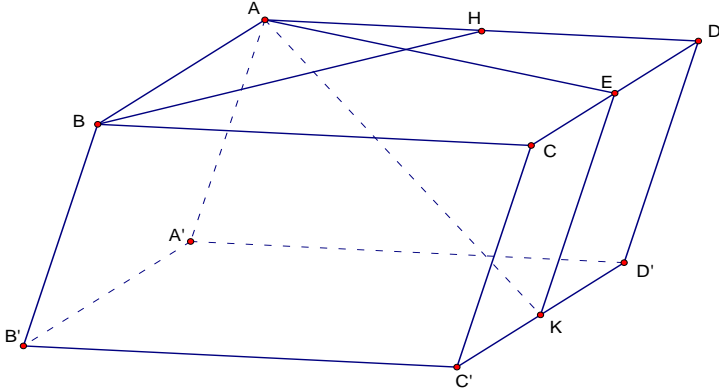
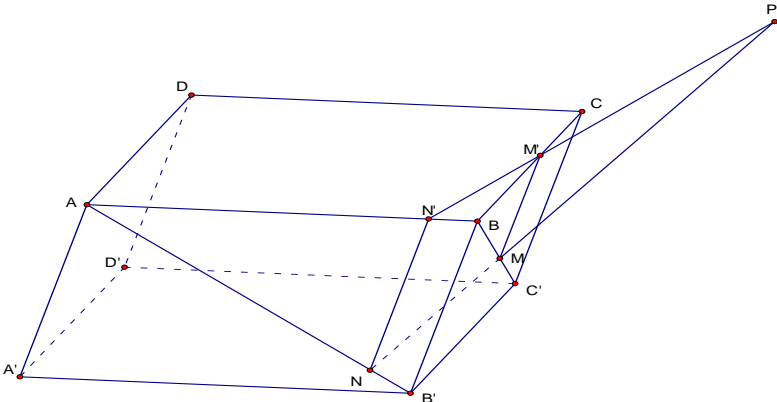
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI KSCL ĐỘI TUYỂN HSG CỤM THPT YÊN THÀNH

(Hướng dẫn chấm này gồm 04 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
1. (6,0đ)	a.	3,0
	$Pt \Leftrightarrow 2(\sin x + 3)\cos^4 \frac{x}{2} - 2\sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 6\cos^2 \frac{x}{2} + 2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (\sin x + 3)\cos^4 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}(\sin x + 3) + 1 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2}(\sin x + 3)(\cos^2 \frac{x}{2} - 1) + 1 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(\sin x + 3)\sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x + 3\sin^2 x - 4 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -2(vn) \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	0,5
	b.	3,0
	Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x^2 + 2} & (a \geq \sqrt{2}) \\ b = \sqrt{x^2 + 2x + 3} & (b \geq \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{b^2 - a^2 - 1}{2}$	0,5
	BPT trở thành: $b^2 - a^2 + \frac{1}{2}(b^2 - a^2 - 1)a + \frac{1}{2}(b^2 - a^2 + 1)b > 0$	1,0
	$\Leftrightarrow (b - a)(b + a + 1)^2 > 0$	0,5
	$\Leftrightarrow b > a \text{ hay } \sqrt{x^2 + 2x + 3} > \sqrt{x^2 + 2}$	0,5
	$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$. Vậy tập nghiệm của bpt là: $S = (-\frac{1}{2}; +\infty)$	0,5
2. (3,0đ)	+) Đa giác lồi (H) có 22 cạnh nên có 22 đỉnh. +) Số tam giác có 3 đỉnh là ba đỉnh của đa giác (H) là $C_{22}^3 = 1540$.	0,5
	+) Số phần tử của không gian mẫu Ω là $n(\Omega) = C_{1540}^2 = 1185030$	0,5
	Số tam giác có một cạnh là cạnh của đa (H) là $22 \cdot 18 = 396$ +) Số tam giác có hai cạnh là cạnh của đa (H) là 22	0,5
	Số tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa (H) là: $1540 - 396 - 22 = 1122$ +) Gọi A là biến cố “ hai tam giác được chọn có một tam giác có 1 cạnh là cạnh của (H) và 1 tam giác không có cạnh nào là cạnh của (H)”	0,5
	Số phần tử của A là $n(A) = C_{396}^1 \cdot C_{1122}^1$	0,5
	Xác suất của biến cố A là $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{396}^1 \cdot C_{1122}^1}{1185030} = \frac{748}{1995}$	0,5
3. (2,0đ)	Ta có: $u_2 = \frac{1}{3}$ Với $n \geq 3$, ta có: $u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n = n^3 u_n$ (1) $u_1 + 2u_2 + \dots + (n-1)u_{n-1} = (n-1)^3 u_{n-1}$ (2)	0,5

	Từ (1) và (2), suy ra: $nu_n = n^3 u_n - (n-1)^3 u_{n-1}$ $\Rightarrow u_n = \frac{(n-1)^3}{n^3 - n} u_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{n}{n+1} u_{n-1}$	0,5
	$\Rightarrow u_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 \dots \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{3}{4} u_2$	0,5
	$\Rightarrow u_n = \frac{4}{n^2(n+1)}$ Do đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{2} (n^3 - n) u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 18 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 18.$	0,5
4.	a.	3,0
(5,0đ)	 <p>Gọi E là trung điểm của cạnh CD, ta có: $KE \perp (ABCD) \Rightarrow KE \perp BH$ (1)</p> <p>Mặt khác, ta có: $\triangle ABH = \triangle DAE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{DAE}$ $\Rightarrow \widehat{AHB} + \widehat{HAE} = \widehat{AHB} + \widehat{ABH} = 90^\circ$ $\Rightarrow BH \perp AE$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2), suy ra: $BH \perp (AEK) \Rightarrow BH \perp AK$</p>	1,0
	b.	2,0
	 <p>Gọi M', N' lần lượt là hình chiếu của M, N trên (ABCD). Không mất tính tổng quát giả sử $MM' < NN'$. Gọi $P = MN \cap M'N'$, khi đó:</p> <p>$(\widehat{MN}, (ABCD)) = \widehat{MPM'} = 45^\circ, MM' = BM', NN' = AN' = a - BN', MN = PN - PM$ $\Rightarrow MN \cos 45^\circ = PN \cos 45^\circ - PM \cos 45^\circ = PN' - PM' = M'N'$ (1)</p> <p>Do đó: $M'N' = \sqrt{BN'^2 + BM'^2} = MN \cos 45^\circ$ Ta có: $MN \sin 45^\circ = PN \sin 45^\circ - PM \sin 45^\circ = NN' - MM' = a - (BN' + BM')$ (2)</p>	0,5

	<p>Từ (1) và (2) suy ra:</p> $MN(\sqrt{2}\cos 45^0 + \sin 45^0) = \sqrt{2(BN'^2 + BM'^2)} + a - (BN' + BM')$ $\geq (BN' + BM') + a - (BN' + BM') = a$ <p>(BĐT Bunhiacôpxki)</p> $\Rightarrow MN \geq (2 - \sqrt{2})a$	<p>0,5</p>
<p>5. (2,0đ)</p>	<div data-bbox="310 394 1258 955" data-label="Image"> </div> <p>Gọi E là giao điểm thứ hai của BM và đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC. Ta chứng minh E thuộc AF.</p> <p>Thật vậy tứ giác AFBN nội tiếp nên $\widehat{NAB} = \widehat{NFB}$</p> <p>Tương tự $\widehat{MAC} = \widehat{MEC}$, theo giả thiết $\widehat{NAB} = \widehat{MAC}$, suy ra: $\widehat{NFB} = \widehat{MEC}$</p> <p>Do đó tứ giác BCEF nội tiếp. Suy ra $\widehat{CFE} = \widehat{CBE} = \widehat{NBA} \Rightarrow \widehat{NFA} = \widehat{NFE}$.</p> <p>Suy ra A, E, F thẳng hàng.</p>	<p>0,5</p>
	<p>Đường thẳng BM đi qua B và M nên có phương trình: $x - y + 2 = 0$.</p> <p>$E = AF \cap BM$, suy ra tọa độ của E là nghiệm của hpt:</p> $\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow E(3;5)$	<p>0,5</p>
	<p>Đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác AMC có phương trình dạng:</p> $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 - c > 0)$ <p>Vì M, Q, E thuộc (T) nên ta có hpt:</p> $\begin{cases} 6a + 2b + c = -10 \\ -2\sqrt{2}b + c = -22 \\ 6a + 10b - c = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -22 \end{cases} \quad (tm)$ <p>Suy ra (T) có pt: $x^2 + y^2 - 4x - 22 = 0$.</p>	<p>0,5</p>

	<p>A là giao điểm của AE và (T) nên tọa độ điểm A là nghiệm của hpt:</p> $\begin{cases} x+y-8=0 \\ x^2+y^2-4x-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=1 \\ x=3 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow A(7;1)$ <p>Vậy $A(7;1)$</p>	0,5
6. (2,0đ)	<p>Có $ab+bc+ca=1$ nên</p> $b^2+c^2+2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-a^2=(a+b+c)^2-a^2=S^2-a^2$ <p>trong đó $S=a+b+c$ và $S^2=(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \geq 3 \Rightarrow S \geq \sqrt{3}$.</p> <p>Khi đó $\frac{a}{b^2+c^2+2} + \frac{b}{c^2+a^2+2} + \frac{c}{a^2+b^2+2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$</p>	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{a}{S^2-a^2} + \frac{b}{S^2-b^2} + \frac{c}{S^2-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \frac{aS^2}{S^2-a^2} + \frac{bS^2}{S^2-b^2} + \frac{cS^2}{S^2-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S^2$ $\Leftrightarrow \frac{a^3}{S^2-a^2} + a + \frac{b^3}{S^2-b^2} + b + \frac{c^3}{S^2-c^2} + c \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S^2$ $\Leftrightarrow \frac{a^3}{S^2-a^2} + \frac{b^3}{S^2-b^2} + \frac{c^3}{S^2-c^2} + S \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S^2$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{a^4}{aS^2-a^3} + \frac{b^4}{bS^2-b^3} + \frac{c^4}{cS^2-c^3} + S \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S^2$ <p>Lại có theo Cauchy-Schwarz thì</p> $\frac{a^4}{aS^2-a^3} + \frac{b^4}{bS^2-b^3} + \frac{c^4}{cS^2-c^3} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{S^2(a+b+c)-(a^3+b^3+c^3)}$ $= \frac{S(a^2+b^2+c^2)^2}{S^4-(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{S(S^2-2)^2}{S^4-(S^2-2)^2} = \frac{S(S^2-2)^2}{4S^2-4}$ <p>(Vì $(a^2+b^2+c^2)^2 = (\sqrt{a}\sqrt{a^3} + \sqrt{b}\sqrt{b^3} + \sqrt{c}\sqrt{c^3})^2 \leq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$)</p>	0,5
	<p>Ta đi chứng minh $\frac{S(S^2-2)^2}{4(S^2-1)} + S \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S^2 \Leftrightarrow \frac{(S^2-2)^2}{4(S^2-1)} + 1 \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S$</p> $\Leftrightarrow 2S^3 - 3\sqrt{3}S^2 + 3\sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow (S-\sqrt{3})(2S^2 - \sqrt{3}S - 3) \geq 0$ $\Leftrightarrow (S-\sqrt{3})^2(2S+\sqrt{3}) \geq 0 \quad (\text{luôn đúng } \forall S \geq \sqrt{3})$ <p>Vậy BĐT (*) được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.</p>	0,5
	<p>.....Hết.....</p> <p><u>Ghi chú:</u> HS giải cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.</p>	

