

# Interfaces et Polymères aléatoires

Cours de M2, Quentin Berger

28 mars 2023

---

## Table des matières

### Partie I : Modèles d'accrochage d'interfaces

<b>1</b>	<b>Modèles effectifs d'interfaces</b>	4
1.1	Modèles d'interfaces sans contrainte	5
1.1.1	Définitions et notations	5
1.1.2	Le cas de la dimension $d = 1$	7
1.1.3	Mesures de Gibbs et propriétés de Markov spatiale	8
1.2	Le champ libre gaussien sur $\mathbb{Z}^d$	10
1.2.1	Structure de covariance	10
1.2.2	Localisation/délocalisation et limite de volume infini	14
1.3	Contrainte de mur dur et répulsion entropique	19
1.3.1	Le cas de la dimension $d = 1$	20
1.3.2	Le cas du GFF en dimension $d \geq 3$	24
1.3.3	Le cas du GFF en dimension $d = 2$	30
1.4	Quelques exercices	31
<b>2</b>	<b>Modèles d'accrochage (pinning et wetting)</b>	34
2.1	Introduction du modèle et premières propriétés	34
2.1.1	Énergie libre et premières propriétés	35
2.1.2	Transition de phase	37
2.1.3	Existence de l'énergie libre	38
2.2	Énergie libre et transition de phase dimension $d = 1$	44
2.2.1	Calcul de l'énergie libre (formule implicite)	44
2.2.2	Points critiques et comportement critiques	48
2.3	Énergie libre et transition de phase en dimension $d = 2$	51
2.4	Énergie libre et transition de phase en dimension $d \geq 3$	54
2.4.1	Le cas sans contrainte (pinning)	54
2.4.2	Le cas avec contrainte (wetting)	55
2.5	Quelques exercices	58

## Partie II : Modèle d'accrochage désordonné en dimension $d = 1$

### 3 Modèle d'accrochage désordonné :

<b>premières propriétés et diagramme de phase</b> .....	60
3.1 Introduction du modèle d'accrochage (pinning) .....	60
3.1.1 Modèle homogène .....	61
3.1.2 Modèle désordonné .....	61
3.2 Retour sur le modèle homogène .....	63
3.2.1 Transition de phase .....	64
3.2.2 Propriétés trajectorielles .....	67
3.2.3 Quelques propriétés des processus de renouvellement .....	69
3.3 Modèle désordonné, premières propriétés .....	70
3.3.1 Énergie libre .....	70
3.3.2 Transition de phase .....	75
3.4 Quelques propriétés du diagramme de phase .....	78
3.4.1 Le désordre facilite l'accrochage .....	78
3.4.2 Comparaison avec le modèle annealed .....	80
3.4.3 Résumé du diagramme de phase .....	82

### 4 Pertinence vs. non-pertinence du désordre pour le modèle d'accrochage .

4.1 Préliminaires sur la pertinence/non-pertinence du désordre .....	83
4.1.1 Pertinence vs. non-pertinence du désordre et critère de Harris .....	83
4.1.2 Monotonie de la pertinence .....	85
4.2 Martingale et transition de faible à fort désordre .....	87
4.2.1 La martingale et sa transition de phase .....	87
4.2.2 Critère pour la transition de phase .....	88
4.3 Non-pertinence du désordre .....	94
4.4 Inégalité de lissage et pertinence du désordre .....	96
4.5 Moments fractionnaires et déplacement du point critique .....	99

### Références .....

100

## Quelques références générales

Pour le Chapitre 1 :

- Le survey [Vel06] d'Yvan Velenik ou les notes de cours [Gia01] de Giambattista Giacomin.
- Pour la Section 1.2 sur le champ libre gaussien, le livre de Sasha Friedli et Yvan Velenik *Statistical Mechanics of Lattice Systems* [FV17, Ch. 8], qui est une excellente référence.

Pour le Chapitre 2 :

- Le livre [Gia07] de Giambattista Giacomin *Random Polymer Models* (pour la dimension  $d = 1$ ).
- Une partie de l'article [GL17] *Pinning and disorder relevance for the lattice Gaussian free field*, par Giambattista Giacomin et Hubert Lacoin.

Pour les Chapitres 3 et 4 :

- Les livres [Gia07, Gia11] de Giambattista Giacomin, *Random Polymer Models* et *Disorder and critical phenomena*.

## Chapitre 1

# Modèles effectifs d'interfaces

Les modèles d'interface que nous allons étudier ont été introduits en tant que modèles effectifs pour décrire des interfaces dans des systèmes de physique statistique, mais possèdent leur intérêt en soi. Ils décrivent une surface aléatoire simplifiée, c'est-à-dire une fonction de hauteur aléatoire  $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ , où  $\Lambda$  est un domaine de  $\mathbb{Z}^d$ , avec  $d \geq 1$ . On parlera d'interface en dimension  $d + 1$ . Un modèle important dans ce cadre, sur lequel une grande partie de ce chapitre va se concentrer, est le champ libre gaussien (Gaussian Free Field, ou GFF, en anglais) sur  $\mathbb{Z}^d$ .

## Notations

On notera  $x \sim y$  si  $x$  et  $y$  sont voisins dans  $\mathbb{Z}^d$ , c'est-à-dire si  $\|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1$ . On écrira  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  si  $\Lambda$  est un sous-ensemble *fini* de  $\mathbb{Z}^d$  et  $\partial\Lambda := \{y \in \Lambda^c, \exists x \in \Lambda, x \sim y\}$  le bord extérieur de  $\Lambda$ .

Si  $\varphi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$  est une fonction donnée et  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ , on notera  $\varphi_\Lambda$  la restriction de  $\varphi$  à  $\Lambda$ . On notera aussi  $\varphi_x = \varphi(x)$ , que l'on interprétera comme la hauteur de l'interface au-dessus du point  $x$ . Si  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  on parlera de modèles discrets ; si  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on parlera de modèles continus.

**Mesures de Gibbs.** On considère un système physique dont l'ensemble des configurations peut être décrit par un ensemble  $\Omega$ . Si  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction d'énergie, appelé hamiltonien, qui associe une énergie à chaque configuration possible du système, alors on peut considérer la mesure de Gibbs  $P_\beta$  sur  $\Omega$  :

$$\frac{dP_\beta}{d\mu}(\omega) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(\omega)}. \quad (1.1)$$

Ici,  $\mu$  est une mesure de référence sur  $\Omega$  (pas nécessairement une mesure de probabilité), souvent donnée par la mesure de comptage sur  $\Omega$  si  $\Omega$  est discret ou la mesure de Lebesgue si  $\Omega \simeq \mathbb{R}^n$  pour un  $n \geq 1$ . Le paramètre  $\beta > 0$  est un paramètre positif, lié à l'inverse de la température ( $\beta = \frac{1}{k_B T}$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann), qui règle l'influence de l'énergie sur les configurations du système. La constante  $Z_\beta$ , appelée *fonction de partition*, est la constante qui renormalise la mesure de Gibbs pour obtenir une probabilité sur  $\Omega$ . La mesure  $P_\beta$  décrit les probabilités d'occurrence de configurations du système : si l'énergie  $H(\omega)$  d'une configuration est élevée, celle-ci sera moins probable ; on peut par exemple montrer que lorsque  $\beta \rightarrow \infty$ , la mesure  $P_\beta$  tend à se concentrer sur les configurations d'énergie minimale.

*Remarque 1.1.* Soulignons ici que l'on peut modifier le hamiltonien en rajoutant une constante sans changer la mesure de Gibbs  $P_\beta$ . En effet, si  $H'(\omega) = H(\omega) + C$  où  $C$  ne

dépend pas de  $\omega \in \Omega$ , alors

$$\frac{dP'_\beta}{d\mu}(\omega) = \frac{1}{Z'_\beta} e^{-\beta H'(\omega)} = \frac{1}{Z'_\beta e^{\beta C}} e^{-\beta H(\omega)},$$

ce qui donne bien la même mesure  $P'_\beta = P_\beta$  (mais pas la même fonction de partition :  $Z_\beta = e^{\beta C} Z'_\beta$ ).

*Remarque 1.2.* Les mesures de Gibbs apparaissent naturellement comme des mesures qui maximisent l'entropie d'un système dont l'énergie a été fixée. Par exemple, la loi normale est une mesure de Gibbs sur  $\Omega = \mathbb{R}$ , associée au hamiltonien  $H(x) = x^2$  (si  $x$  représente la vitesse d'une particule,  $H(x)$  est son énergie cinétique), avec  $\mu = \text{Leb}$  comme mesure de référence sur  $\Omega$ . On peut montrer que, parmi les lois de probabilité à densité  $f$  sur  $\mathbb{R}$  d'espérance nulle et de variance 1, la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  est celle qui maximise l'entropie  $-\int_{\mathbb{R}} f(x) \ln f(x) dx$ .

## 1.1 Modèles d'interfaces sans contrainte

### 1.1.1 Définitions et notations

On se donne une fonction  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  symétrique et convexe, appelé potentiel. Pour  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  un domaine et  $\xi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une condition au bord, on associe une énergie à une fonction  $\varphi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$H_\Lambda^\xi(\varphi) = H(\varphi_\Lambda \mid \xi_{\Lambda^c}) = \frac{1}{4d} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ x \sim y}} V(\varphi_x - \varphi_y) + \frac{1}{2d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} V(\varphi_x - \xi_y). \quad (1.2)$$

La fonction  $V$  représente les interactions dans la surface et donne une énergie importante aux gradients importants dans la surface (on parle de modèle gradient). Grâce à la Remarque 1.1, on peut supposer que  $V(0) = 0$ .

On définit alors un modèle d'interface sur  $\Lambda$  en considérant une mesure de Gibbs sur l'ensemble des surfaces (continues ou discrètes)

$$\Omega_\Lambda^\mathbb{R} = \{h : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}\} \quad \text{ou} \quad \Omega_\Lambda^\mathbb{Z} = \{h : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}\},$$

avec condition au bord  $\xi$  : en prenant  $\mu_\Lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\Omega_\Lambda^\mathbb{R} = \mathbb{R}^\Lambda$  et  $\mu_\Lambda$  est la mesure de comptage sur  $\Omega_\Lambda^\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^\Lambda$ , on considère

$$\frac{dP_{\Lambda, \beta}^\xi}{d\mu_\Lambda}(\varphi) = \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}^\xi} e^{-\beta H_\Lambda^\xi(\varphi)}. \quad (1.3)$$

La fonction de partition  $Z_{\Lambda, \beta}^\xi$  s'écrit de la manière suivante :

$$Z_{\Lambda, \beta}^\xi = \int_{\Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda^\xi(\varphi)} d\mu_\Lambda. \quad (1.4)$$

Pour unifier les notations, on écrira indifféremment dans la suite  $\Omega_\Lambda = \Omega_\Lambda^{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$  ; on précisera s'il s'agit d'un modèle discret ou d'un modèle continu si nécessaire. On notera souvent  $h$  un élément de  $\Omega_\Lambda$  et  $\varphi_\Lambda$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\Omega_\Lambda$  : par exemple, on écrira, pour tout  $A$  borélien de  $\Omega_\Lambda$  :

$$P_{\Lambda,\beta}^\xi(\varphi_\Lambda \in A) = \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^\xi} \int_A e^{-\beta H_\Lambda^\xi(h)} \prod_{x \in \Lambda} d\mu(h_x), \quad Z_{\Lambda,\beta}^\xi = \int_{\Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda^\xi(h)} \prod_{x \in \Lambda} d\mu(h_x),$$

où  $\mu$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  ou la mesure de comptage sur  $\mathbb{Z}$  suivant que l'on soit dans le cas discret ou continu (dans tous les cas on a  $\mu_\Lambda = \mu^{\otimes \Lambda}$ ). On notera aussi  $E_{\Lambda,\beta}^\xi$  l'espérance relative à la probabilité  $P_{\Lambda,\beta}^\xi$ .

La condition au bord peut s'interpréter de la manière suivante : la mesure  $P_{\Lambda,\beta}^\xi$  a pour support les fonctions  $\varphi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  qui coïncident avec  $\xi$  sur  $\Lambda^c$  ; une autre manière de le voir est de considérer  $P_{\Lambda,\beta}^\xi$  comme une mesure sur les fonctions  $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont étendues sur  $\partial\Lambda$  en posant  $\varphi_{\partial\Lambda} = \xi_{\partial\Lambda}$ .

**Lemme 1.3.** *Si on a  $A_\beta := \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta V(h)} d\mu(h) < +\infty$ , alors, pour toute condition au bord  $\xi$ , on a  $Z_{\Lambda,\beta}^\xi \leq (K_\beta)^{|\Lambda|} < +\infty$ . En particulier la fonction de partition est (strictement positive et) finie et la mesure de Gibbs  $P_{\Lambda,\beta}^\xi$  donnée en (4.4) est bien définie.*

*Démonstration.* On se ramène facilement au cas où  $\Lambda$  est connexe : si ce n'est pas le cas, on peut utiliser l'Exercice 1.1 ci dessous.

Supposons pour commencer que la dimension est  $d = 1$  et que  $\Lambda = \{1, \dots, N\}$ . Alors

$$Z_{\Lambda,\beta}^\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^{N+1} e^{-\beta V(h_i - h_{i-1})} \prod_{i=1}^N d\mu(h_i),$$

avec par convention dans l'intégrale  $h_0 = \xi_0$  et  $h_{N+1} = \xi_{N+1}$ . En utilisant la majoration  $e^{-\beta V(\xi_{N+1} - h_N)} \leq 1$ , on obtient par une récurrence simple

$$Z_{\Lambda,\beta}^\xi \leq \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N e^{-\beta V(h_i - h_{i-1})} \prod_{i=1}^N d\mu(h_i) \leq (A_\beta)^N.$$

Pour la récurrence, on a utilisé un changement de variable (et le fait que  $\mu$  soit invariant par translation) pour avoir que pour tout  $h' \in \mathbb{R}$ ,  $\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta V(h - h')} d\mu(h) = A_\beta$ .

Dans le cas de la dimension  $d \geq 2$ , l'argument est le même mais les notations un peu plus lourdes. L'idée est de se donner un arbre couvrant de  $\Lambda$ , de majorer  $e^{-\beta V(h_x - h_y)} \leq 1$  si  $x, y \in \Lambda$  ne sont pas voisins dans l'arbre, et d'intégrer de proche en proche, en intégrant à chaque fois un indice  $x$  qui est de degré 1 dans l'arbre. On laisse en exercice le soin d'écrire une preuve rigoureuse.  $\square$

**Exercice 1.1.** Si  $\Lambda, \Lambda' \in \mathbb{Z}^d$  sont disjoints et tels que  $x \not\sim y$  pour tous  $x \in \Lambda, y \in \Lambda'$ , montrer que  $Z_{\Lambda \cup \Lambda', \beta}^\xi = Z_{\Lambda, \beta}^\xi Z_{\Lambda', \beta}^\xi$ .

**Exercice 1.2.** Montrer que pour tout  $a < b$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour toute condition au bord  $\xi$ , on ait  $P_{\Lambda, \beta}^{\xi}(\varphi_x \in [a, b] \forall x \in \Lambda) \leq e^{-c|\Lambda|}$ .

## Deux exemples importants

**Modèle Solid-On-Solid (SOS).** Dans le cas de la modélisation d'une interface du modèle d'Ising, la fonction de hauteur  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , et l'énergie associée à l'interface est proportionnelle au nombre de désaccord entre spins '+' et spins '-', c'est-à-dire proportionnelle à la superficie de l'interface. L'énergie liée à une interface est donc proportionnelle à  $\sum_{x \sim y} |\varphi_x - \varphi_y| + |\Lambda|$  (la première somme compte la superficie des parties verticales et le deuxième terme celle des parties horizontales). Cela correspond donc au choix  $V(x) = |x|$  dans le hamiltonien (1.2) (d'après la Remarque 1.1, la constante  $|\Lambda|$  ne change pas la mesure de Gibbs).

**Champ libre gaussien (GFF).** Le choix d'une fonction de hauteur  $\varphi$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et un potentiel quadratique  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  est aussi très naturel, car alors  $H_{\lambda}(\varphi)$  correspond à l'énergie d'une configuration de ressort. On verra que dans ce cas là on est capable de montrer que  $\varphi_{\Lambda}$  est un vecteur gaussien, dont on pourra caractériser l'espérance et la matrice de covariance, ce qui permettra de faire de nombreux calculs par la suite.

### 1.1.2 Le cas de la dimension $d = 1$

Prenons le cas de la dimension  $d = 1$ , avec  $\Lambda = \{1, \dots, N\}$ . On suppose comme dans le Lemme 1.3 que  $A_{\beta} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta V(h)} d\mu(h) < +\infty$ . Ainsi, on peut définir une loi de probabilité  $\mu_{\beta}$  sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$  en posant :

$$\frac{d\pi_{\beta}}{d\mu}(x) = \frac{1}{A_{\beta}} e^{-V(x)}. \quad (1.5)$$

Considérons maintenant  $(X_i)_{i \geq 1}$  des variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\pi_{\beta}$  (donc à valeurs dans  $\mathbb{R}$  dans le cas continu et dans  $\mathbb{Z}$  dans le cas discret). On pose  $S_0 = \xi_0$  et  $S_k = \xi_0 + \sum_{i=1}^k X_i$  la marche aléatoire construite à partir des variables aléatoires  $(X_i)_{i \geq 1}$ .

On peut alors déterminer la loi de  $(S_1, \dots, S_{N+1})$ , qui est obtenue par un simple changement de variable à partir de la loi produit  $\mu_{\beta}^{\otimes(N+1)}$  :

$$dP_{(S_1, \dots, S_{N+1})}(s_1, \dots, s_{N+1}) = \frac{1}{A_{\beta}^{N+1}} \prod_{i=1}^{N+1} e^{-V(s_i - s_{i-1})} \prod_{i=1}^{N+1} d\mu(s_i),$$

où on a utilisé la convention  $s_0 = \xi_0$  et le fait que  $\mu$  est invariante par translation.

On remarque alors que la loi de  $(S_1, \dots, S_N)$  conditionnellement à  $S_{N+1} = \xi_{N+1}$  est donnée (à la fois dans le cas discret et dans le cas continu) par

$$\begin{aligned} dP_{(s_1, \dots, s_N) | s_{N+1} = \xi_{N+1}}(s_1, \dots, s_N) &= \frac{dP_{(s_1, \dots, s_{N+1})}(s_1, \dots, s_N, \xi_{N+1})}{dP_{s_{N+1}}(\xi_{N+1})} \\ &= \frac{\frac{1}{A_\beta^{N+1}} \prod_{i=1}^{N+1} e^{-V(s_i - s_{i-1})} \prod_{i=1}^N d\mu(s_i)}{\left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{A_\beta^{N+1}} \prod_{i=1}^{N+1} e^{-V(s_i - s_{i-1})} \prod_{i=1}^N d\mu(s_i) \right)}, \end{aligned}$$

où ici on a posé par convention  $s_0 = \xi_0$  et  $s_{N+1} = \xi_{N+1}$  (à la fois dans le numérateur et le dénominateur). On reconnaît la mesure de Gibbs donnée par (4.4).

En conclusion, on a montré le résultat suivant.

**Lemme 1.4.** *Si  $\Lambda = \{1, \dots, N\}$ , alors la loi de  $\varphi_\Lambda = (\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$  sous  $P_{\Lambda, \beta}^\xi$  est la même que celle d'une marche aléatoire  $(S_i)_{1 \leq i \leq N}$  d'incréments  $X_i$  de loi  $\pi_\beta$  donnée en (1.5), issue de  $S_0 = \xi_0$  et conditionnée à finir en  $S_{N+1} = \xi_{N+1}$ .*

### 1.1.3 Mesures de Gibbs et propriétés de Markov spatiale

Dans cette section, on va démontrer la propriété suivante, appelée *propriété de Markov spatiale*. Pour  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ , on notera  $\mathcal{F}_\Lambda = \sigma(\varphi_x, x \in \Lambda)$  la tribu engendrée par la fonction de hauteur sur  $\Lambda$ .

**Proposition 1.5.** *Soit  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \Subset \mathbb{Z}^d$ . Alors pour toute fonction mesurable positive  $f : \Omega_{\Lambda_1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  on a*

$$E_{\Lambda_2, \beta}^\xi [f(\varphi_{\Lambda_1}) | \mathcal{F}_{\Lambda_1^c}] = E_{\Lambda_1, \beta}^\phi [f(\varphi_{\Lambda_1})]$$

*pour  $P_{\Lambda_2, \beta}^\xi$  presque toute réalisation  $\phi$ .*

Noter que la probabilité  $P_{\Lambda_1, \beta}^\phi$  ne dépend que de la valeur de  $\phi$  sur  $\partial\Lambda_1$ , et on a donc

$$P_{\Lambda_2, \beta}^\xi (\cdot | \mathcal{F}_{\Lambda_1^c}) = P_{\Lambda_2, \beta}^\xi (\cdot | \mathcal{F}_{\partial\Lambda_1}) = P_{\Lambda_1, \beta}^\phi (\cdot),$$

ce qui justifie le nom de propriété de Markov spatiale.

**Corollaire 1.6.** *Pour toute fonction mesurable positive  $f : \Omega_{\Lambda_1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  on a*

$$E_{\Lambda_2, \beta}^\xi [f(\varphi_{\Lambda_1})] = E_{\Lambda_2, \beta}^\xi [E_{\Lambda_1, \beta}^\phi [f(\varphi_{\Lambda_1})]]$$

*Autrement dit, sous  $P_{\Lambda_2, \beta}^\xi$ , la loi marginale de  $\varphi_{\Lambda_2}$  sur  $\Lambda_1$  est la mesure de Gibbs  $P_{\Lambda_1, \beta}^\phi$ , où la condition au bord est donnée par une surface  $\phi$  tirée sous  $P_{\Lambda_2, \beta}^\xi$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, notons que pour toute condition au bord  $\phi$ , on a

$$E_{\Lambda_1, \beta}^\phi [f(\varphi_{\Lambda_1})] = \int_{h \in \mathbb{R}^{\Lambda_1}} f(h) \frac{1}{Z_{\Lambda_1, \beta}^\phi} e^{-\beta H_{\Lambda_1}^\phi(h)} d\mu_{\Lambda_1}(h),$$



et notons qu'il s'agit d'une fonction mesurable de la condition au bord  $(\phi_x)_{x \in \partial \Lambda_1}$  donc de  $(\phi_x)_{x \in \Lambda_1^c}$ .

Soit maintenant  $g : \Omega_{\Lambda_1 \setminus \Lambda_2} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable positive. Alors on a

$$\begin{aligned} & E_{\Lambda_2, \beta}^{\xi} [g(\phi_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}) E_{\Lambda_1, \beta}^{\phi} [f(\phi_{\Lambda_1})]] \\ &= \int_{\tilde{h} \in \mathbb{R}^{\Lambda_2}} \int_{h \in \mathbb{R}^{\Lambda_1}} g(\tilde{h}_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}) f(h) \frac{1}{Z_{\Lambda_1, \beta}^{\tilde{h}}} e^{-\beta H_{\Lambda_1}^{\tilde{h}}(h)} \frac{1}{Z_{\Lambda_2, \beta}^{\xi}} e^{-\beta H_{\Lambda_2}^{\xi}(\tilde{h})} d\mu_{\Lambda_1}(h) d\mu_{\Lambda_2}(\tilde{h}). \end{aligned}$$

Maintenant, notons  $\hat{h}$  est la “concaténation” de  $h \in \mathbb{R}^{\Lambda_1}$  et  $\tilde{h}_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1} \in \mathbb{R}^{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}$ , c'est-à-dire la fonction  $\hat{h} \in \mathbb{R}^{\Lambda_2}$  telle que  $\hat{h} = h$  sur  $\Lambda_1$  et  $\hat{h} = \tilde{h}$  sur  $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ . On remarque que l'on a

$$H_{\Lambda_2}^{\xi}(\tilde{h}) + H_{\Lambda_1}^{\tilde{h}}(h) = H_{\Lambda_1}^{\hat{h}}(\tilde{h}) + H_{\Lambda_2}^{\xi}(\hat{h}).$$

Notons aussi que  $Z_{\Lambda_1, \beta}^{\tilde{h}}$  est une fonction mesurable de  $(\tilde{h}_x)_{x \in \Lambda_1^c}$ , donc  $Z_{\Lambda_1, \beta}^{\tilde{h}} = Z_{\Lambda_1, \beta}^{\hat{h}}$ . En réarrangeant les intégrales, l'expression obtenue ci-dessus est donc égale à

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{h} \in \mathbb{R}^{\Lambda_2}} \int_{\tilde{h} \in \mathbb{R}^{\Lambda_1}} g(\hat{h}_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}) f(\hat{h}_{\Lambda_1}) \frac{1}{Z_{\Lambda_1, \beta}^{\hat{h}}} e^{-\beta H_{\Lambda_1}^{\hat{h}}(\tilde{h})} \frac{1}{Z_{\Lambda_2, \beta}^{\xi}} e^{-\beta H_{\Lambda_2}^{\xi}(\hat{h})} d\mu_{\Lambda_1}(\tilde{h}) d\mu_{\Lambda_2}(\hat{h}) \\ &= \int_{\hat{h} \in \mathbb{R}^{\Lambda_2}} g(\hat{h}_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}) f(\hat{h}_{\Lambda_1}) \frac{1}{Z_{\Lambda_2, \beta}^{\xi}} e^{-\beta H_{\Lambda_2}^{\xi}(\hat{h})} d\mu_{\Lambda_2}(\hat{h}) = E_{\Lambda_2, \beta}^{\xi} [g(\phi_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}) f(\phi_{\Lambda_1})]. \end{aligned}$$

où dans la première égalité on a intégré  $\tilde{h} \in \mathbb{R}^{\Lambda_1}$  et utilisé que  $(Z_{\Lambda_1, \beta}^{\hat{h}})^{-1} e^{-\beta H_{\Lambda_1}^{\hat{h}}(\tilde{h})}$  est une densité de probabilité ; la dernière égalité découle de la définition de  $P_{\Lambda_2, \beta}^{\xi}$ . On a donc obtenu

$$E_{\Lambda_2, \beta}^{\xi} [g(\phi_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}) E_{\Lambda_1, \beta}^{\phi} [f(\phi_{\Lambda_1})]] = E_{\Lambda_2, \beta}^{\xi} [g(\phi_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}) f(\phi_{\Lambda_1})],$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Exercice 1.3.** En utilisant l'Exercice 1.2 et la propriété de Markov spatiale, montrer que pour tout  $a < b$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que pour toute condition au bord  $\xi$  et tout  $\Gamma \subset \Lambda$  on ait  $P_{\Lambda, \beta}^{\xi}(\phi_x \in [a, b] \forall x \in \Gamma) \leq e^{-c|\Gamma|}$ .

On peut aussi utiliser la propriété de Markov spatiale pour montrer le corollaire suivant, en exercice.

**Exercice 1.4.** Soient  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  et  $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \Lambda \Subset$  des ensembles “séparés”, c'est-à-dire tels que  $\partial \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$  et  $\partial \Lambda_2 \cap \Lambda_1 = \emptyset$  (pour rappel,  $\partial \Lambda$  désigne la frontière extérieure). Montrer que sous  $P_{\Lambda, \beta}^{\xi}(\cdot \mid \mathcal{F}_{(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)^c})$ , les interfaces  $\phi_{\Lambda_1}, \phi_{\Lambda_2}$  sont indépendantes.

**Mesures de Gibbs en volume infini.** Si l'on souhaite définir une mesure de Gibbs directement sur le domaine  $\mathbb{Z}^d$ , une option est de construire une suite de mesures  $(P_{\Lambda_n, \beta}^{\xi_n})_{n \geq 0}$  avec  $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$  une suite croissante d'ensemble finis de  $\mathbb{Z}^d$  telle que  $\bigcup \Lambda_n = \mathbb{Z}^d$ . Alors, si pour tout  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  la loi de  $\phi_{\Lambda}$  sous  $(P_{\Lambda_n, \beta}^{\xi_n})_{n \geq 0}$  converge vers une loi  $\mu_{\Lambda, \beta}$  et si l'ensemble de lois  $(\mu_{\Lambda, \beta})_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$  possède une propriété de cohérence spatiale (*i.e.*

$\mu_{\Lambda_1, \beta}$  est la loi marginale de  $\mu_{\Lambda_2, \beta}$ , alors on peut utiliser le théorème d'extension de Kolmogorov pour construire une mesure  $\mu_\beta$  sur  $\mathbb{Z}^d$ . On peut alors notamment montrer que la mesure  $\mu_\beta$  vérifie la propriété de Markov spatiale de la Proposition 1.5.

Cependant, l'utilisation du théorème d'extension de Kolmogorov est, en général, inadapté pour construire des mesures de Gibbs en volume infini. En effet, le choix de conditions au bord  $\xi_n$  s'avère crucial : peut-on faire n'importe quel choix pour les conditions au bord ? est-il même possible de faire un choix de condition au bord qui fonctionne ? est-ce que deux suites de conditions au bord donnent la même mesure en volume infini  $\mu_\beta$  ? L'approche de Dobrushin, Lanford et Ruelle, dite *DLR*, consiste à considérer la propriété de Markov spatiale comme la propriété permettant de caractériser une mesure de Gibbs (la mesure est déterminée par ses *spécifications*, c'est-à-dire ses lois conditionnelles). On en donne ici une version *ad-hoc* au cas que l'on considère, mais on renvoie à l'excellent Chapitre 6 de [FV17] pour une discussion plus poussée concernant les mesures de Gibbs en volume infini.

**Définition 1.7.** On dit que  $\mu_\beta$  est une mesure de Gibbs en volume infini associé au hamiltonien  $H$  et de température inverse  $\beta$  si on a la propriété de cohérence suivante : pour tout  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ , pour toute fonction mesurable positive  $f : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$E_{\mu_\beta} [f(\varphi_\Lambda) \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}] = E_{\Lambda, \beta}^\phi [f(\varphi_\Lambda)] \quad \mu_\beta\text{-p.s.}$$

**Exercice 1.5.** Montrer que l'ensemble des mesures de Gibbs en volume infini (associées à  $H$  et de température inverse  $\beta$ ) est convexe.

## 1.2 Le champ libre gaussien sur $\mathbb{Z}^d$

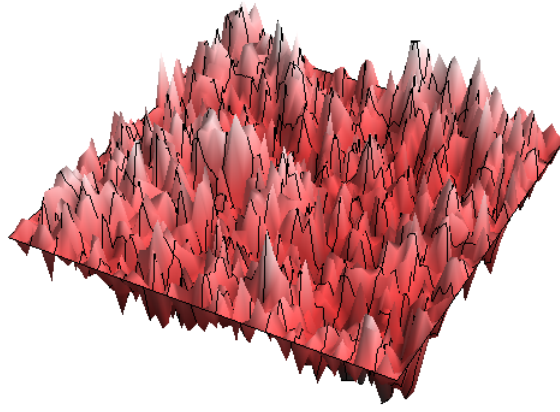
Le champ libre gaussien sur réseau, ou GFF, rentre dans le cadre des modèles d'interface présenté plus haut : il s'agit d'une fonction de hauteur à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec le potentiel  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ . Autrement dit, le hamiltonien est donné par

$$H_\Lambda^\xi(\varphi) = \frac{1}{8d} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ x \sim y}} (\varphi_x - \varphi_y)^2 + \frac{1}{4d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} (\varphi_x - \xi_y)^2. \quad (1.6)$$

### 1.2.1 Structure de covariance

Le GFF est un champ gaussien, dont on peut caractériser explicitement la moyenne et la structure de covariance. On va commencer par décrire le cas d'une condition au bord nulle  $\xi \equiv 0$ , avant de passer au cas d'une condition au bord  $\xi$  quelconque.

**Cas de condition au bord nulle  $\xi \equiv 0$ .** Pour énoncer le résultat, introduisons quelques notations. Pour  $x \in \mathbb{Z}^d$ , on note  $\mathbb{P}_x$  la loi d'une marche aléatoire simple  $(S_n)_{n \geq 0}$  sur  $\mathbb{Z}^d$  issue de  $x$ . Il s'agit d'une chaîne de Markov issue de  $x$ , de matrice de transition



**FIG. 1.1** Une réalisation du champ libre gaussien en dimension  $d = 2$ , sur une grille  $60 \times 60$ , avec condition au bord  $\xi \equiv 0$ .

$$Q(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{si } x \sim y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note  $G_\Lambda$  la fonction de Green de la marche aléatoire simple tuée lorsqu'elle sort de  $\Lambda$  : pour  $x, y \in \Lambda$ ,

$$G_\Lambda(x, y) := \mathbb{E}_x \left[ \sum_{k=0}^{T_\Lambda^c} \mathbb{1}_{\{S_k=y\}} \right] < +\infty,$$

où  $T_A := \min\{n \geq 0, S_n \in A\}$  désigne le temps d'atteinte de l'ensemble  $A \subset \mathbb{Z}^d$ . Le caractère fini de  $G_\Lambda$  découle du fait que  $\Lambda$  est un ensemble fini.

**Proposition 1.8.** Sous  $P_{\Lambda, \beta}^0$ ,  $\varphi_\Lambda = (\varphi_x)_{x \in \Lambda}$  est un vecteur gaussien centré, de matrice de covariance  $\frac{1}{\beta} G_\Lambda$ .

*Démonstration.* Par définition de  $P_{\Lambda, \beta}^0$ , on a

$$\frac{dP_{\Lambda, \beta}^0}{d\text{Leb}_\Lambda}(\varphi) = \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}^0} e^{-\beta H_\Lambda^0(\varphi)}.$$

Il suffit donc de montrer que  $H_\Lambda^0(\varphi) = \frac{1}{2} \langle \varphi_\Lambda, G_\Lambda^{-1} \varphi_\Lambda \rangle$ . Par définition du hamiltonien, on obtient, en développant le premier carré

$$\begin{aligned} 2H_\Lambda^0(\varphi) &= \frac{1}{4d} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ x \sim y}} (\varphi_x - \varphi_y)^2 + \frac{1}{2d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \varphi_x^2 = \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x^2 - \frac{1}{2d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \Lambda \\ x \sim y}} \varphi_x \varphi_y \\ &= \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \left( \varphi_x - \frac{1}{2d} \sum_{y \in \Lambda, y \sim x} \varphi_y \right). \end{aligned}$$

Maintenant, considérons le laplacien discret  $\Delta$  sur  $\mathbb{Z}^d$ , tel que  $Q = I + \Delta$ , c'est-à-dire

$$\Delta_{x, y} = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{si } x \sim y, \\ -1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit aussi les versions restreintes à  $\Lambda$  de la matrice de transition et du laplacien :  $Q_\Lambda = (Q(x, y))_{x, y \in \Lambda}$  et  $\Delta_\Lambda = (\Delta_{x, y})_{x, y \in \Lambda}$ . Alors, l'expression du hamiltonien ci-dessus peut être ré-écrite de la manière suivante :

$$H_\Lambda^0(\varphi) = \frac{1}{2} \langle \varphi_\Lambda, (-\Delta_\Lambda) \varphi_\Lambda \rangle.$$

Il reste donc simplement à montrer que  $-\Delta_\Lambda = I_\Lambda - Q_\Lambda = G_\Lambda^{-1}$ .

Mais on observe que  $(I_\Lambda - Q_\Lambda) \sum_{k=0}^n Q_\Lambda^k = I_\Lambda - Q_\Lambda^{n+1}$ . Or, on montre facilement (les détails techniques sont laissés en exercice) que pour tout  $x, y \in \Lambda$ ,

$$Q_\Lambda^{n+1}(x, y) = \mathbb{P}_x(S_{n+1} = y, S_k \in \Lambda \forall k \leq n+1) \leq \mathbb{P}_x(T_{\Lambda^c} > n+1)$$

et qu'il existe  $c, C > 0$  (qui ne dépendent que de  $\Lambda$ ) tel que  $\sup_{x \in \Lambda} \mathbb{P}_x(T_\Lambda > n) \leq Ce^{-cn}$ .

On en conclut que  $\sup_{x, y \in \Lambda} Q_\Lambda^{n+1}(x, y)$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ . Comme on a

$$G_\Lambda(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(S_k = y, S_i \in \Lambda \forall i \leq k) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_\Lambda^k(x, y) < +\infty,$$

on en déduit que  $(I_\Lambda - Q_\Lambda)G_\Lambda = (I_\Lambda - Q_\Lambda) \sum_{k=0}^{\infty} Q_\Lambda^k = I_\Lambda$ .  $\square$

**Cas d'une condition au bord  $\xi$  générale.** Introduisons une nouvelle notation : pour  $\xi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit la fonction  $u^\xi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  comme l'unique extension  $Q$ -harmonique de  $\xi_{\Lambda^c}$  à l'intérieur de  $\Lambda$ , c'est-à-dire l'unique solution du problème de Dirichlet sur  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  avec conditions au bord  $\xi$  :

$$\begin{cases} (\Delta u^\xi)_x = u_x - \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} u_y = 0 & \text{pour } x \in \Lambda \\ u_x^\xi = \xi_x & \text{pour } x \in \Lambda^c \end{cases} \quad (1.7)$$

Il est classique de montrer que la fonction définie par

$$u_x^\xi := \mathbb{E}_x[\xi_{S_{T_{\Lambda^c}}}]$$

est une solution du problème de Dirichlet ; l'unicité vient du fait que  $\Lambda$  est fini, donc  $T_{\Lambda^c} < +\infty$   $\mathbb{P}_x$ -p.s. pour tout  $x \in \Lambda$ .

**Proposition 1.9.** *Pour toute condition au bord  $\xi$ , sous  $P_{\Lambda, \beta}^\xi$ ,  $\varphi_\Lambda = (\varphi_x)_{x \in \Lambda}$  est un vecteur gaussien d'espérance  $E_{\Lambda, \beta}^\xi[\varphi_x] = u_x^\xi$ , de matrice de covariance  $\frac{1}{\beta} G_\Lambda$ .*

Autrement dit, sous  $P_{\Lambda, \beta}^\xi$ , on peut écrire  $\varphi_\Lambda = u^\xi + \varphi_\Lambda^0$ , où  $\varphi_\Lambda^0$  est un GFF centré. L'effet de la condition au bord  $\xi$  n'est donc qu'une translation du GFF centré, par  $u^\xi$ , c'est-à-dire par l'extension harmonique de  $\xi$  à l'intérieur de  $\Lambda$ .

*Démonstration.* De la même manière que dans le cas centré, il suffit de montrer que

$$H_\Lambda^\xi(\varphi) = \frac{1}{2} \langle (\varphi_\Lambda - u_\Lambda^\xi), G_\Lambda^{-1}(\varphi_\Lambda - u_\Lambda^\xi) \rangle + C_\Lambda^\xi,$$

où la constante  $C_\Lambda^\xi$  ne dépend pas de  $\varphi$  (d'après la Remarque 1.1, cette constante n'affecte pas la loi  $P_{\Lambda,\beta}^\xi$ ).

Notons que d'une part

$$\begin{aligned} 2H_\Lambda^\xi(\varphi) &= \frac{1}{4d} \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ x \sim y}} (\varphi_x - \varphi_y)^2 + \frac{1}{2d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c \\ x \sim y}} (\varphi_x - \xi_y)^2 \\ &= 2H_\Lambda^0(\varphi) - \frac{1}{2d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \varphi_x \xi_y + \frac{1}{2d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \xi_y^2. \end{aligned}$$

D'autre part, en se rappelant que  $G_\Lambda^{-1} = -\Delta_\Lambda$ , on a

$$\langle (\varphi_\Lambda - u_\Lambda^\xi), G_\Lambda^{-1}(\varphi_\Lambda - u_\Lambda^\xi) \rangle = \langle \varphi_\Lambda, G_\Lambda^{-1} \varphi_\Lambda \rangle + 2\langle \varphi_\Lambda, \Delta_\Lambda \varphi_\Lambda \rangle + \langle u_\Lambda^\xi, G_\Lambda^{-1} u_\Lambda^\xi \rangle.$$

Ainsi, comme  $\langle \varphi_\Lambda, G_\Lambda^{-1} \varphi_\Lambda \rangle = 2H_\Lambda^0(\varphi)$  d'après le cas de la condition au bord nulle et que  $u^\xi$  ne dépend que de  $\Lambda$  et  $\xi$  (et pas de  $\varphi$ ), il reste à montrer que

$$\langle \varphi_\Lambda, \Delta_\Lambda \varphi_\Lambda \rangle + \frac{1}{2d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \varphi_x \xi_y = \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x (\Delta_\Lambda u)_x + \frac{1}{2d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \varphi_x \xi_y$$

ne dépend que de  $\Lambda$  et  $\xi$  et pas de  $\varphi$ . Mais en utilisant le fait que  $u^\xi$  est harmonique sur  $\Lambda$ , on obtient que pour  $x \in \Lambda$

$$0 = (\Delta u^\xi)_x = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} u_y^\xi - u_x^\xi = (\Delta_\Lambda u^\xi)_x + \frac{1}{2d} \sum_{y \notin \Lambda, y \sim x} u_y^\xi.$$

Comme  $u_y^\xi = \xi_y$  pour  $y \notin \Lambda$ , on en conclut que

$$0 = \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x (\Delta u^\xi)_x = \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x (\Delta_\Lambda u)_x + \frac{1}{2d} \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ y \notin \Lambda, y \sim x}} \varphi_x \xi_y,$$

qui ne dépend effectivement pas de  $\varphi$ . Cela conclut la démonstration.  $\square$

*Remarque 1.10.* On aurait pu prendre la Proposition 1.9 comme définition du GFF, c'est-à-dire celle d'un champ gaussien d'espérance  $u^\xi$  et de matrice de covariance  $G_\Lambda$ . On peut en fait prendre cette même définition en remplaçant la marche aléatoire simple par une marche aléatoire  $(S_n)_{n \geq 0}$  sur  $\mathbb{Z}^d$  quelconque, de matrice de transition  $Q$ . Le champ libre gaussien sur  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  associé à  $Q$  et de condition au bord  $\xi$  est alors le vecteur gaussien d'espérance  $u_\Lambda^\xi$  et de matrice de covariance  $\frac{1}{\beta} G_\Lambda$ , où :

(i)  $u_x^\xi = \mathbb{E}_x[\xi_{S_{T_{\Lambda^c}}}]$  est l'unique extension  $Q$ -harmonique de  $\xi$  dans  $\Lambda$  ;

(ii)  $G_\Lambda(x, y) = \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{T_{\Lambda^c}} \mathbb{1}_{\{S_k=y\}}] = \sum_{k=0}^{\infty} Q_\Lambda^k(x, y)$  est la fonction de Green de la marche aléatoire  $(S_n)_{n \geq 0}$  tuée lorsqu'elle sort de  $\Lambda$ .

On peut alors montrer (on le laisse en exercice) que cela correspond à une mesure de Gibbs sur  $\Omega_\Lambda$  donnée par le hamiltonien

$$H_{\Lambda}^{\xi}(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda} Q(x,y)(\varphi_x - \varphi_y)^2 + \sum_{x \in \Lambda, y \notin \Lambda} Q(x,y)(\varphi_x - \xi_y)^2.$$

Noter que ce hamiltonien n'est pas simplement une fonction du gradient de  $\varphi$  mais peut posséder des interactions à longue portée (on peut avoir des termes  $(\varphi_x - \varphi_y)^2$  avec  $x \not\sim y$ ). Les propriétés du champ libre gaussien sont déterminées par la structure de covariance et sont donc reliées aux propriétés de la marche aléatoire  $(S_n)_{n \geq 0}$  considérée, à travers sa fonction de Green  $G_{\Lambda}$ .

*Remarque 1.11.* Grâce à l'invariance par changement d'échelle des variables gaussiennes, on sait que la loi de  $\sqrt{\beta}\varphi_{\Lambda}$  sous  $P_{\Lambda,\beta}^0$  est la même que celle de  $\varphi_{\Lambda}$  sous  $P_{\Lambda,\beta=1}^0$ , c'est-à-dire un vecteur gaussien centré de matrice de covariance  $G_{\Lambda}$ . Ainsi, on peut voir le paramètre  $\beta$  comme un simple facteur d'échelle (dans le cas d'une condition au bord générale, on peut utiliser la Proposition 1.8 pour faire un changement d'échelle de  $\varphi - u^{\xi}$ ).

## 1.2.2 Localisation/délocalisation et limite de volume infini

La structure de covariance du GFF donnée dans les Propositions 1.8-1.9 permet d'obtenir des informations sur l'interface  $\varphi$ .

### Localisation/délocalisation de l'interface

L'une des première question est de savoir si, pour un GFF sur  $\Lambda_N := \{-N, \dots, N\}^d$  avec condition au bord nulle, la hauteur du point central  $\varphi_0$  reste tendue lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Si c'est le cas, on dit que l'interface est *localisée*; dans le cas contraire on dit que l'interface est *délocalisée*. Étudier la variance de  $\varphi_0$  sous  $P_{\Lambda_N,\beta}^0$  est donc un bon moyen de tester la localisation/délocalisation de l'interface; dans le cas de variables gaussiennes, cela caractérise même la loi de  $\varphi_0$ .

**Proposition 1.12.** *Pour  $\Lambda_N := \{-N, \dots, N\}^d$ , on a*

$$\text{Var}_{\Lambda_N,\beta}^0(\varphi_0) = \frac{1}{\beta} G_{\Lambda_N}(0,0) \quad \text{avec} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} G_{\Lambda_N}(0,0) \begin{cases} = +\infty & \text{si } d = 1, 2, \\ < +\infty & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

On a donc délocalisation de l'interface en dimension  $d = 1, 2$  et localisation de l'interface en dimension  $d \geq 3$ . Cette proposition ne requiert pas de démonstration : en effet, la variance est donnée dans la Proposition 1.8; de plus, par convergence monotone, on a  $\lim_{N \rightarrow \infty} G_{\Lambda_N}(0,0) = G(0,0)$ , où  $G$  est la fonction de Green de la marche simple sur  $\mathbb{Z}^d$  et vaut  $+\infty$  en dimension  $d = 1, 2$  (car la marche est récurrente) et est finie en dimension  $d \geq 3$  (car la marche est transiente).

*Remarque 1.13.* Il est possible d'obtenir des estimées très précise sur la fonction de Green  $G_{\Lambda_N}(0,0)$  (voir [Law13, §1.5 et 1.6]) :

1. En dimension  $d = 1$ , on a  $G_{\Lambda_N}(0,0) = N + 1$ . (*Indic. : utiliser la ruine du joueur.*)

2. En dimension  $d \geq 2$ , on a  $G_{\Lambda_N}(0,0) = \frac{2}{\pi} \log N + O(1)$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

3. En dimension  $d \geq 3$ , on a  $G_{\Lambda_N}(0,0) = G(0,0) + O(N^{2-d})$ .

Soulignons aussi qu'en dimension  $d \geq 3$ , on peut montrer que pour  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , on a  $\text{Cov}_{\Lambda_N, \beta}^0(\varphi_x, \varphi_y) = \frac{1}{\beta} G_{\Lambda_N}(x, y)$  avec  $\lim_{N \rightarrow \infty} G_{\Lambda_N}(x, y) = G(x, y)$  et

$$G(x, y) \sim c_d \|x - y\|^{2-d} \quad \text{quand } \|x - y\| \rightarrow +\infty,$$

pour une constante  $c_d$  explicite. Ainsi, l'interface reste localisée mais les hauteurs sont fortement corrélées.

**Exercice 1.6.** Pour  $N \geq 1$  et  $x \in \Lambda_N$ , on pose  $\sigma_N^2(x) := G_{\Lambda_N}(x, x)$ . Soit  $\xi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une condition au bord.

1. Montrer que

$$\mathbf{P}_{N, \beta}^{\xi}(|\varphi_x| \geq t) \leq \mathbf{P}\left(\frac{1}{\beta} \sigma_N^2(x) |Z| \geq t - |u_x|^{\xi}\right)$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $u^{\xi}$  est le prolongement harmonique de  $\xi$  dans  $\Lambda_N$ .

2. Montrer que  $\sigma_N^2(x) \leq G_{\Lambda_{2N}}(0, 0)$  et que  $|u_x^{\xi}| \leq M_N^{\xi} := \max_{y \in \partial \Lambda_N} |\xi_y|$ , pour tout  $x \in \Lambda_N$ . En déduire que

$$\mathbf{P}_{N, \beta}^{\xi}(|\varphi_x| \geq t) \leq \exp\left(-\frac{\beta(t - M_N^{\xi})^2}{2G_{\Lambda_{2N}}(0, 0)}\right).$$

3. Conclure que si  $M_N^{\xi} = o(\log N)$  en dimension  $d = 2$  et si  $M_N^{\xi} = o(\sqrt{\log N})$  en dimension  $d \geq 3$ , alors pour tout  $\eta > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N, \beta}^{\xi}\left(\max_{x \in \Lambda_N} |\varphi_x| \geq (1 + \eta) \alpha_N\right) = 0,$$

où  $\alpha_N = \sqrt{\frac{8}{\pi\beta}} \log N$  si  $d = 2$  et  $\alpha_N = \sqrt{\frac{2d}{\beta} G(0, 0)} \sqrt{\log N}$  si  $d \geq 3$ .

**Discussion dans le cadre général.** Ce phénomène de localisation/délocalisation est en général assez difficile à étudier et la phénoménologie est en fait assez différente selon que l'on considère une interface continue ou discrète.

En dimension  $d = 1$ , avec l'interprétation de  $(\varphi_x)_{-N \leq x \leq N}$  comme une marche aléatoire conditionnée à valoir 0 en  $-(N+1)$  et  $N+1$ , on obtient naturellement l'estimée  $\text{Var}_{\Lambda_N, \beta}^0(\varphi_0) \sim c_{\beta} N$ , quel que soit le potentiel  $V$  que l'on s'est donné dans le hamiltonien (1.2) — pourvu que  $\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-V(x)} dx < +\infty$ , ce qui assure que  $E_{\pi_{\beta}}(X_i) = 0$  et  $E_{\pi_{\beta}}(X_i^2) < +\infty$  (où  $\pi_{\beta}$ , défini en (1.5), est la loi d'un incrément de la marche).

Dans le cas continu, il s'avère que les bornes supérieures  $\text{Var}_{\Lambda_N, \beta}^0(\varphi_0) \leq C \log N$  en dimension  $d = 2$  et  $\text{Var}_{\Lambda_N, \beta}^0(\varphi_0) \leq C$  en dimension  $d \geq 3$  restent valables de manière très générale (voir l'article récent [Dar23]). En particulier, l'interface en dimension  $d \geq 3$  reste localisée. Pour les interfaces en dimension  $d = 2$ , des bornes inférieures logarithmiques ont été données dans des cadres généraux, montrant la délocalisation de l'interface (voir l'introduction de [Dar23] qui recense la littérature sur ce sujet).

Dans le cas discret, il n'existe que très peu de résultat généraux et les résultats se concentrent sur le cas de certaines interfaces discrètes, notamment le modèle SOS

mentionné plus haut (et le modèle dit gaussien discret). Dans ces cas particuliers la localisation des interfaces est démontrée en dimension  $d \geq 3$ . Le cas de la dimension  $d = 2$  est particulier : on peut démontrer dans certains exemples (notamment le modèle SOS et discret gaussien, voir [FS81, AHPS21], il s'agit à chaque fois de résultats difficiles) qu'il existe une transition de localisation/délocalisation, dans le sens où il existe un  $0 < \beta_c < \infty$  tel que

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \text{Var}_{\Lambda_N, \beta}^0(\varphi_0) &< +\infty & \text{si } \beta > \beta_c, \\ \forall h > 0, \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\Lambda_N, \beta}^0(|\varphi_0| > t) &= 0 & \text{si } \beta < \beta_c. \end{aligned}$$

Il est conjecturé que ce phénomène est général dans le cas d'interfaces discrètes (la localisation pour  $\beta$  suffisamment grand est générale).

### Limite de volume infini du GFF

**Théorème 1.14.** *En dimension  $d = 1, 2$ , il n'existe pas de mesure de Gibbs en volume infini associée au hamiltonien (1.6) du GFF.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. Soit  $\mu_\beta$  une mesure de Gibbs en volume infini, c'est-à-dire qui vérifie la Définition 1.7. Alors, en utilisant la définition, pour tout  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  avec  $0 \in \Lambda$ , pour tous  $a < b$  on a

$$\mu_\beta(\varphi_0 \in [a, b]) = \mathbb{E}_{\mu_\beta} [\mathbb{P}_{\Lambda, \beta}^\xi(\varphi_0 \in [a, b])].$$

Or, sous  $\mathbb{P}_{\Lambda, \beta}^\xi$  on sait que  $\varphi_0$  suit une loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , avec  $m = u_0^\xi$  et  $\sigma^2 = \frac{1}{\beta} G_\Lambda(0, 0)$ . En utilisant le fait que la densité de la loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  est bornée uniformément par  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ , on obtient que

$$\mathbb{P}_{\Lambda, \beta}^\xi(\varphi_0 \in [a, b]) \leq \frac{\sqrt{\beta/2\pi}}{\sqrt{G_\Lambda(0, 0)}}(b - a),$$

quelle que soit la condition au bord  $\xi$ . Cette même borne supérieure est valable pour  $\mu_\beta(\varphi_0 \in [a, b])$  et comme  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  est arbitraire et que  $\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} G_\Lambda(0, 0) = +\infty$ , on en déduit que

$$\text{pour tous } a < b, \quad \mu_\beta(\varphi_0 \in [a, b]) = 0,$$

ce qui est une contradiction.  $\square$

*Remarque 1.15.* Le fait qu'il n'existe pas de mesure en volume infini est donc essentiellement dû au fait que les fluctuations du point central  $\varphi_0$  ne sont pas bornées lorsque  $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ . Pour remédier à ce problème, on peut définir le GFF “accroché en 0”, en considérant  $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0$  (qui est une translation par un vecteur aléatoire  $\varphi_0$ ). On peut montrer (exercice) que

(i) Sous  $\mathbb{P}_{\Lambda, \beta}^0$ ,  $\tilde{\varphi}_\Lambda = (\tilde{\varphi}_x)_{x \in \Lambda}$  est un vecteur gaussien centré, de matrice de covariance  $\tilde{G}_\Lambda$  donnée par  $\tilde{G}_\Lambda(x, y) = G_\Lambda(x, y) - G_\Lambda(x, 0) - G_\Lambda(0, x) + G_\Lambda(0, 0)$ .

(ii) Quand  $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ ,  $\tilde{G}_\Lambda(x, y) = \tilde{G}(x, y) < +\infty$ , avec  $\tilde{G}(x, y) = \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{T_0} \mathbb{1}_{\{S_k=y\}}]$ .



On peut alors définir un champ gaussien sur  $\mathbb{Z}^d$  de matrice de covariance  $\tilde{G}$ . De manière générale, on peut définir une mesure de Gibbs sur la famille des *gradients*  $(\varphi_x - \varphi_y)_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$  dans n'importe quelle dimension, plutôt que simplement sur les hauteurs ; voir les notes de cours [Fun05].

**Théorème 1.16.** *Soit  $d \geq 3$ . Si  $\xi$  est une fonction harmonique sur  $\mathbb{Z}^d$ , alors il existe une mesure de Gibbs  $\mu_\beta = P_{\infty,\beta}^\xi$  en volume infini sur  $\mathbb{Z}^d$ , associée au hamiltonien (1.6) du GFF. La mesure  $\mu_\beta$  est gaussienne, d'espérance  $\xi$  et de covariance  $(\frac{1}{\beta}G(x,y))_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$ .*

En particulier, il existe une infinité de mesures de Gibbs en volume infini... On peut de plus montrer que si  $\mathcal{G}$  est l'ensemble (convexe) des mesures de Gibbs associées au GFF, alors les mesures  $\{P_{\infty,\beta}^\xi, \xi \text{ harmonique sur } \mathbb{Z}^d\}$  sont les points extrémaux de  $\mathcal{G}$ .

*Remarque 1.17 (Définition d'un champ gaussien).* Une famille  $(W_x)_{x \in I}$  est un champ gaussien d'espérance  $m = (m_x)_{x \in I}$  et de covariance  $(g(x,y))_{x,y \in I}$  si pour tout sous-ensemble fini  $J \subset I$ ,  $(W_y)_{y \in J}$  est un vecteur gaussien d'espérance  $m_J = (m_y)_{y \in J}$  et de matrice de covariance  $g_J = (g(x,y))_{x,y \in J}$ .

*Démonstration.* Notons que la loi gaussienne énoncée dans le théorème est bien définie. En effet, pour tout  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ , la loi de  $\varphi_\Lambda$  sous  $P_{\Lambda,\beta}^\xi$  est gaussienne de moyenne  $u^\xi = \xi$  (car  $\xi$  est harmonique) et de matrice de covariance  $\frac{1}{\beta}G_\Lambda$ . Comme en dimension  $d \geq 3$  on a  $\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} G = G$ , on peut construire un champ gaussien  $\varphi = (\varphi_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  d'espérance  $\xi$  et de covariance  $\frac{1}{\beta}G$  (en utilisant le théorème d'extension de Kolmogorov, voir par exemple [FV17, Th. 8.6]).

Soit donc  $\mu_\beta$  la loi du champ gaussien  $\varphi = (\varphi_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  d'espérance  $\xi$  et de covariance  $\frac{1}{\beta}G$ . Il reste à montrer que la mesure  $\mu_\beta$  vérifie la Définition 1.7 d'une mesure de Gibbs en volume infini, c'est-à-dire la propriété de Markov spatiale : étant donné  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ , « pour  $\mu_\beta$  presque tout  $\phi$ , la loi conditionnelle de  $\varphi_\Lambda$  sachant  $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$  est donnée par  $P_{\Lambda,\beta}^\phi$  ». Autrement dit, d'après la Proposition 1.9, il suffit de montrer que pour  $\mu_\beta$  presque tout  $\phi$ ,

$$E_{\mu_\beta} [e^{i\langle t_\Lambda, \varphi_\Lambda \rangle} \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}] = e^{i\langle t_\Lambda, u_\Lambda^\phi \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle t_\Lambda, G_\Lambda t_\Lambda \rangle} \quad \text{pour tout } t_\Lambda \in \mathbb{R}^\Lambda,$$

où on rappelle que  $u_x^\phi = \mathbb{E}_x[\phi_{S_{T_{\Lambda^c}}}]$  est l'unique extension harmonique de  $\phi$  sur  $\Lambda$ .

La preuve consiste essentiellement en quelques lemmes, énoncés ci-dessous, qui mettent à profit la structure gaussienne de  $\mu_\beta = P_{\infty,\beta}^\xi$ . On renvoie à [FV17, §8.4.2] pour une démonstration détaillée

**Lemme 1.18.** *Pour  $P_{\infty,\beta}^\xi$ -presque tout  $\phi$ , on a  $E_{\infty,\beta}^\xi[\varphi_x \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}] = u_x^\phi$  pour tout  $x \in \Lambda$ .*

**Lemme 1.19.** Sous  $P_{\infty,\beta}^\xi$ ,  $u_\Lambda^\phi$  est un vecteur gaussien d'espérance  $\xi$  et de matrice de covariance  $K_\Lambda$ , donnée par  $K_\Lambda(x,y) = \mathbb{E}_x[\sum_{k \geq T_{\Lambda^c}} \mathbb{1}_{\{S_k=y\}}] = G(x,y) - G_\Lambda(x,y)$ .

**Lemme 1.20.** Sous  $P_{\infty,\beta}^\xi$ ,  $\varphi_\Lambda - u_\Lambda^\phi$  est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance  $G_\Lambda = G - K_\Lambda$ . De plus,  $\varphi_\Lambda - u_\Lambda^\phi$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$  (donc de  $u_\Lambda^\phi$ ).

Avec ces trois lemmes, on obtient que pour  $\mu_\beta$  presque tout  $\phi$ , comme  $(u_x^\phi)_{x \in \Lambda}$  est  $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$ -mesurable et  $(\varphi_x - u_x^\phi)_{x \in \Lambda}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$ ,

$$\mathbb{E}_{\mu_\beta} [e^{i\langle t_\Lambda, \varphi_\Lambda \rangle} \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}] = e^{i\langle t_\Lambda, u_\Lambda^\phi \rangle} \mathbb{E}_{\mu_\beta} [e^{i\langle t_\Lambda, \varphi_\Lambda - u_\Lambda^\phi \rangle}] = e^{i\langle t_\Lambda, u_\Lambda^\phi \rangle} e^{\frac{1}{2}\langle t_\Lambda, G_\Lambda t_\Lambda \rangle},$$

qui est ce que l'on souhaitait démontrer  $\square$

**Exercice 1.7.** On considère le cas du GFF en dimension  $d \geq 3$ . Soit  $h \in \mathbb{R}$  un réel fixé : la fonction constante  $\xi \equiv h$  est harmonique sur  $\mathbb{Z}^d$ , donc on peut considérer la mesure en volume infini  $\mu_\beta^h = \mu_\beta^{\xi \equiv h}$ . On pose  $\Lambda_N = \{1, \dots, N\}^d$  et on note  $\Phi_N := \max_{x \in \Lambda_N} |\varphi_x|$ .

1. Montrer que  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{2^k}}{\sqrt{\log 2^k}} \leq \sqrt{\frac{2d}{\beta}} \sqrt{G(0,0)} \mu_\beta^h$ -p.s.
2. En conclure que  $\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\Phi_N}{\sqrt{\log N}} \leq \sqrt{\frac{2d}{\beta}} \sqrt{G(0,0)} \mu_\beta^h$ -p.s.

*Indic. Utiliser la croissance de  $N \mapsto \Phi_N$ .*

## Limite d'échelle du GFF

On peut aussi considérer la limite d'échelle du GFF. Si  $D \subset \mathbb{R}^d$  est un domaine de l'espace, on peut chercher à définir un champ  $\Phi$  qui serait la limite d'échelle du champ libre gaussien avec condition au bord nulle.

L'idée est de considérer un maillage du domaine par une grille de taille  $\delta > 0$ , c'est-à-dire de considérer un domaine  $\Lambda_N = ND \cap \mathbb{Z}^d = \{x \in \mathbb{Z}^d, \frac{x}{N} \in D\}$ , de sorte que  $D_\delta = \frac{1}{N}\Lambda_N$  correspond à un maillage de taille  $\delta = N^{-1}$  du domaine  $D$ . On peut alors définir un GFF sur  $D_\delta$  en posant  $\varphi_\delta(x) = \varphi_{Nx}$ , où  $\varphi$  est un GFF sur  $\Lambda_N = ND_\delta$ .

Ainsi,  $(\varphi_\delta(x))_{x \in D_\delta}$  est un champ gaussien centré, de matrice de covariance  $G_\delta(x,y) = G_{\Lambda_N}(Nx, Ny)$ , et il s'avère que l'on a la relation

$$G_\delta(x,y) \sim \delta^{d-2} \mathcal{G}_D(x,y),$$

où  $\mathcal{G}_D$  est la fonction de Green *continue* sur le domaine  $D$  (la fonction de Green du mouvement brownien tué lorsqu'il sort de  $D$ ). Ainsi, si l'on veut avoir une limite non-dégénérée, on doit renormaliser le GFF  $\varphi_\delta$  par  $\delta^{1-d/2}$  : on devrait obtenir que  $\tilde{\varphi}_\delta = \delta^{1-d/2} \varphi_\delta$  converge vers un champ gaussien centré de matrice de covariance  $\mathcal{G}_D$ .

En dimension 1, il n'y a pas vraiment de problème : la normalisation correspond à celle de la marche aléatoire simple (voir la Section 1.1.2), et la limite d'échelle du GFF est un pont brownien.

En dimension  $d \geq 2$ , il n'y a aucune normalisation à faire ! Il y a cependant un petit problème, car on peut facilement voir que la variance  $\text{Var}_{D_\delta}^0(\varphi_\delta)$  diverge logarithmiquement... Autrement dit, on a  $\mathcal{G}_D(0,0) = +\infty$ . Il en va de même pour la dimension  $d \geq 3$ , car l'interface est localisée, mais renormalisée par  $\delta^{1-d/2}$  qui diverge quand  $\delta \downarrow 0$ .

Il s'avère qu'à part en dimension  $d = 1$ , la bonne manière de considérer la limite d'échelle est de construire le GFF continu comme une fonction généralisée plutôt que comme une vraie fonction (définie en chaque point). Plus précisément, si on note  $\mathcal{C}_c$  l'ensemble des fonctions de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  continues à support compact (interprété comme un espace de fonctions tests), alors on définit, pour tout  $f \in \mathcal{C}_c$ ,

$$(\tilde{\varphi}_\delta, f) = \delta^d \sum_{x \in D_\delta} \tilde{\varphi}_\delta(x) f(x),$$

On peut alors montrer que pour tout  $f \in \mathcal{C}_c$ ,  $(\tilde{\varphi}_\delta, f)$  converge en loi vers  $(\Phi, f)$ , où  $\Phi$  est une distribution aléatoire, appelée champ libre gaussien (GFF) continu<sup>1</sup>. La loi du GFF continu  $\Phi$  sur  $D$  est caractérisé par la famille gaussienne  $\{(\Phi, f), f \in \mathcal{C}_c\}$  qui est centrée et de covariance

$$\text{Cov}((\Phi, f), (\Phi, g)) = \int_{D \times D} f(x) g(y) \mathcal{G}_D(x, y) dx dy.$$

On renvoie aux notes de cours de Berestycki et Powell [BP21] pour la définition et un aperçu des propriétés (et des domaines d'application) du GFF continu.

### 1.3 Contrainte de mur dur et répulsion entropique

Le but de cette section est d'étudier l'effet d'une contrainte de mur dur sur les propriétés de l'interface. On se restreint au cas de condition au bord nulle ( $\xi \equiv 0$ ) et pour  $\Lambda \Subset \mathbb{R}^d$  on introduit l'événement

$$\Omega_\Lambda^+ = \{(\varphi_x)_{x \in \Lambda} \in \Omega_\Lambda, \varphi_x \geq 0 \forall x \in \Lambda\}, \quad (1.8)$$

qui fait référence à une *contrainte de mur dur* : la fonction de hauteur est nécessairement positive.

On considère alors la mesure de Gibbs avec contrainte positive :

$$\frac{dP_{\Lambda, \beta}^+(\varphi)}{d\mu} = \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}^+} e^{-\beta H_\Lambda^0(\varphi)} \mathbb{1}_{\Omega_\Lambda^+}(\varphi_\Lambda), \quad (1.9)$$

où  $Z_{\Lambda, \beta}^+ = \int_{\Omega_\Lambda^+} e^{-\beta H_\Lambda^0(\varphi)} d\mu = Z_{\Lambda, \beta}^0 P_{\Lambda, \beta}^0(\Omega_\Lambda^+)$  est la fonction de partition qui normalise la mesure  $P_{\Lambda, \beta}^+$  à une probabilité.

Remarquons que, pour  $A$  borélien de  $\Omega_\Lambda$ ,

$$P_{\Lambda, \beta}^+(\varphi_\Lambda \in A) = \int_{A \cap \Omega_\Lambda^+} \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}^+} e^{-\beta H_\Lambda^0(h)} d\mu(h) = \frac{P_{\Lambda, \beta}^0(\varphi_\Lambda \in A \cap \Omega_\Lambda^+)}{P_{\Lambda, \beta}^0(\Omega_\Lambda^+)} = P_{\Lambda, \beta}^0(\varphi_\Lambda \in A \mid \Omega_\Lambda^+),$$

1. Cette convergence vers le GFF continu est en réalité robuste et reste valable pour des modèles d'interface assez généraux.

où on a utilisé l'observation plus haut que  $Z_{\Lambda,\beta}^+ = Z_{\Lambda,\beta}^0 P_{\Lambda,\beta}^0(\Omega_\Lambda^+)$ . Autrement dit, la mesure  $P_{\Lambda,\beta}^+$  est simplement la mesure  $P_{\Lambda,\beta}^0$  conditionnée à ce que l'interface reste au-dessus d'un mur dur.

On va montrer dans les prochaines sections que cette contrainte (ou ce conditionnement) se traduit par un effet de répulsion de l'interface.

### 1.3.1 Le cas de la dimension $d = 1$

On traite dans cette section uniquement le cas d'une interface discrète :  $\varphi_x \in \mathbb{Z}$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ . On considérera, pour  $N \geq 1$ , le cas où  $\Lambda_N = \{1, \dots, N\}$  et on notera

$$P_N^0 := P_{\Lambda_N,\beta}^0 \quad \text{et} \quad P_N^+ := P_{\Lambda_N,\beta}^+,$$

et similairement pour les fonctions de partitions  $Z_N^0, Z_N^+$  associées.

Notre but est de comparer les propriétés des interfaces sous  $P_N^0$  et sous  $P_N^+$ . On rappelle que sous  $P_N^0$ ,  $(\varphi_x)_{1 \leq x \leq N}$  est une marche aléatoire conditionnée à avoir  $\varphi_0 = \varphi_{N+1} = 0$ . On utilisera donc la notation pus standard pour des marches aléatoires :

- On considère  $(X_i)_{i \geq 1}$  des variables aléatoires i.i.d. de loi symétrique (de loi  $\pi_\beta$  donnée en (1.5), avec  $V$  supposé symétrique), avec  $\sigma^2 := E[X_i^2] < +\infty$ ;
- On pose  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$  pour tout  $n \geq 0$ , et la loi  $P_N^0$  (resp.  $P_N^+$ ) correspond à la loi de  $(S_k)_{0 \leq k \leq N+1}$  conditionnée à avoir  $S_{N+1} = 0$  (resp.  $S_k \geq 0$  pour tout  $1 \leq k \leq N$  et  $S_N = 0$ ).

*Remarque 1.21.* On peut montrer que  $(\frac{1}{\sqrt{N}}(S_k)_{0 \leq k \leq \lfloor tN \rfloor})_{t \in [0,1]}$  converge en loi vers un pont brownien sous  $P_N^0$  et une excursion brownienne normalisée sous  $P_N^+$ . On va se concentrer dans ce qui suit sur des propriétés plus faibles (mais potentiellement plus robuste pour l'analyse d'autres modèles).

Considérons les contacts entre la marche aléatoire et la ligne  $\mathbb{Z} \times \{0\}$ . Pour  $k \leq \ell$ , on note

$$\mathcal{L}_N(k, \ell) := \sum_{n=k}^{\ell} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}},$$

le nombre de contacts entre la marche et la ligne, entre les instants  $k$  et  $\ell$  et on pose  $\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_N(1, N)$  le nombre total de contacts (en dehors de  $S_0 = S_{N+1} = 0$ ).

Si l'on souhaite étudier  $\mathcal{L}_N(k, \ell)$ , il est naturel de commencer par estimer son espérance, donc d'estimer les probabilité  $P_N^0(S_n = 0)$  et  $P_N^+(S_n = 0)$ . Posons

$$p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad p_n^+ = P(S_n = 0, S_k \geq 0 \forall 1 \leq k \leq n),$$

et notons que l'on a

$$P_N^0(S_n = 0) = P(S_n = 0 \mid S_{N+1} = 0) = \frac{P(S_n = 0, S_{N+1} = 0)}{P(S_{N+1} = 0)} = \frac{p_n p_{N+1-n}}{p_{N+1}}, \quad (1.10)$$

et, de la même manière,

$$P_N^+(S_n = 0) = P(S_n = 0 \mid S_{N+1} = 0, S_k \geq 0 \forall 0 \leq k \leq n) = \frac{p_n^+ p_{N+1-n}^+}{p_{N+1}^+}. \quad (1.11)$$

Ainsi, un pré-requis important est d'obtenir des estimées sur  $p_n, p_n^+$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 1.22.** Si  $E(X_i) = 0$  et  $E(X_i^2) = \sigma^2 < +\infty$ , on a, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$p_n \sim \frac{c_1}{n^{1/2}}, \quad p_n^+ \sim \frac{c_2}{n^{3/2}},$$

où  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$  et  $c_2$  est une constante qui dépend plus finement de la loi de  $X_1$  (et qui est semi-explicite).

*Démonstration.* L'équivalent asymptotique de  $p_n$  est classique et donné par le Théorème Central Limite local ; on peut le trouver par exemple dans [LL10, §2].

**Théorème (TCL local).** Soient  $(X_i)_{i \geq 0}$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , avec  $E(X_i) = 0$  et  $\sigma^2 = E(X_i^2) < +\infty$ , telles que la marche aléatoire  $(S_n)_{n \geq 0}$  est apériodique sur  $\mathbb{Z}$ . Alors, si  $g_\sigma$  est la densité de la loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , on a

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{n} P(S_n = x) - g_\sigma(x/\sqrt{n}) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En particulier, on a  $P(S_n = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 n}}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Pour l'équivalent de  $p_n^+$ , c'est un peu plus délicat. La plupart des démonstrations utilisent un résultat combinatoire (le lemme cyclique) et ce qui s'appelle une factorisation de Wiener-Hopf : on renvoie à [AD99, Pro. 6] pour une démonstration complète.

On donne ici une interprétation probabiliste du facteur  $n^{-3/2}$ . Commençons par un joli lemme, valable pour les marches aléatoires à incréments symétriques (il s'agit d'un vieux résultat de Sparre Andersen, mais la preuve est tirée de [DDG13, Prop. 1.3]).

**Lemme 1.23.** Soient  $(X_i)_{i \geq 0}$  des variables aléatoires i.i.d. de loi symétrique et soit  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . On pose

$$q_n := P(S_k \geq 0 \forall 1 \leq k \leq n), \quad \bar{q}_n := P(S_k > 0 \forall 1 \leq k \leq n).$$

Alors :

(i) Si la loi de  $X_i$  est sans atomes alors  $q_n = \bar{q}_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ .

(ii) De manière générale,  $\bar{q}_n \leq \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \leq q_n$ .

Ce qui est remarquable dans ce résultat est que premièrement aucune hypothèse n'est faite sur la loi (on n'a besoin d'aucune hypothèse de moment) ; deuxièmement, dans le cas sans atomes, la probabilité  $q_n$  est *universelle* et ne dépend pas de la loi considérée.

**Remarque 1.24.** Comme  $\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ , on obtient l'équivalent asymptotique de  $q_n$  dans le cas sans atomes et  $q_n \asymp 1/\sqrt{n}$  en général. Le comportement en  $1/\sqrt{n}$  reste universel

dans le cadre non symétrique avec  $E(X_i) = 0$ ,  $E(X_i^2) < +\infty$ , mais n'est pas universel dans le cas où  $X_i$  n'a pas de deuxième moment fini.

*Démonstration.* Posons  $T = \min\{0 \leq k \leq n, S_k = \min_{0 \leq i \leq n} \{S_i\}\}$ . On a alors l'égalité d'événements (faire un dessin) :

$$\{T = k\} = \{X_k < 0, X_k + X_{k-1} < 0, \dots, X_k + \dots + X_1 < 0\} \\ \cap \{X_{k+1} \geq 0, X_{k+1} + X_{k+2} \geq 0, \dots, X_{k+1} + \dots + X_n \geq 0\}.$$

Ainsi, en utilisant l'indépendance et le caractère i.i.d. on obtient

$$P(T = k) = P(S_1 < 0, \dots, S_k < 0) P(S_1 \geq 0, \dots, S_{n-k} \geq 0) = \bar{q}_k q_{n-k},$$

où pour la dernière égalité on a utilisé la symétrie de  $(S_i)_{i \geq 1}$ . En sommant sur  $k$ , puis en créant la fonction génératrice, on obtient (en reconnaissant une série de Cauchy), pour tout  $|x| < 1$ ,

$$\sum_{k=0}^n \bar{q}_k q_{n-k} = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{Q}(x) Q(x) := \left( \sum_{k=0}^{\infty} \bar{q}_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(i) Maintenant, dans le cas où la loi de  $X_i$  est sans atomes, on a clairement  $\bar{q}_k = q_k$  pour tout  $k \geq 0$ , de sorte que les séries génératrices sont égales  $\bar{Q}(x) = Q(x)$  et

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{for all } |x| < 1.$$

En développant  $(1-x)^{-1/2}$  en série entière et en identifiant les coefficients, on obtient le résultat voulu  $q_k = \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k}$ .

(ii) Dans le cas général, on approche  $X_i$  par une loi sans atomes. Soient  $(U_i)_{i \geq 1}$  des variables aléatoires de loi  $\mathcal{U}([-1, 1])$  et pour  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\tilde{X}_i := X_i + \frac{\varepsilon}{n} U_i$ , qui sont bien i.i.d. de loi symétrique et sans atomes. En posant naturellement  $\tilde{S}_k = \sum_{i=1}^k \tilde{X}_i$  et comme les  $U_i \in [-1, 1]$ , on remarque que  $S_k - \varepsilon \leq \tilde{S}_k \leq S_k + \varepsilon$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ . On obtient donc

$$P(S_k \geq \varepsilon \forall 1 \leq k \leq n) \leq P(\tilde{S}_k \geq 0 \forall 1 \leq k \leq n) \leq P(\tilde{S}_k \geq -\varepsilon \forall 1 \leq k \leq n).$$

D'après le point (i), la probabilité dans le terme central vaut exactement  $\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ . En prenant  $\varepsilon \downarrow 0$ , on en déduit donc que  $\bar{q}_n \leq \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \leq q_n$ .  $\square$

En utilisant le fait que  $P(S_k \geq 0 \forall 1 \leq k \leq n) \asymp 1/\sqrt{n}$  et le TCL local, on peut avoir l'intuition derrière le terme  $n^{-3/2}$ . En effet, on peut découper l'intervalle  $[0, n]$  en trois parties et l'événement  $\{S_k \geq 0 \forall 1 \leq k \leq n\}$  peut être décomposé en trois parties :  $\{S_k \geq 0 \forall k \leq n/3\}$ , puis  $\{S_{n/3} = S_{2n/3} \text{ et } S_k \geq 0\}$  et enfin  $\{S_{n-k} \geq 0 \forall k \leq n/3\}$ . Par le TCL local, la probabilité de la partie centrale est de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$ ; par les estimées de  $q_n$ , la première et la dernière partie sont de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$ . En combinant les différentes estimées, on obtient le terme  $n^{-3/2}$ .  $\square$

**Exercice 1.8.** En appliquant la stratégie précédente, montrer proprement qu'il existe un  $c > 0$  telle que  $p_n^+ \leq cn^{-3/2}$ . La borne inférieure  $p_n^+ \geq c'n^{-3/2}$  est plus délicate...

On peut maintenant utiliser les estimées du Théorème 1.22, combinées aux expressions (1.10)-(1.11), pour obtenir des informations sur le nombre de contacts  $\mathcal{L}_N$  entre l'interface et la ligne  $\mathbb{N} \times \{0\}$ , sous les mesures  $P_N^0$  et  $P_N^+$ .

### Le cas sans contrainte de mur.

**Proposition 1.25.** *Pour tous  $0 \leq a \leq b \leq 1$ , on a*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} E_N^0 [\mathcal{L}_N(\lfloor aN \rfloor, \lfloor bN \rfloor)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du.$$

En particulier, cela montre que  $\mathcal{L}_N$  est d'ordre  $\sqrt{N}$ ; cela montre aussi que les points sont “en moyenne” répartis, dans le sens où la limite ci-dessus est strictement positive pour tout  $a < b$ . Notons que l'on peut en réalité montrer la convergence en loi, sous  $P_N^0$ , de  $(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{L}_N(0, \lfloor bN \rfloor))_{b \in [0,1]}$  vers le processus du temps local en 0 d'un pont brownien.

*Démonstration.* Grâce à l'expression (1.10) et au Théorème 1.22, on obtient

$$\begin{aligned} E_N^0 [\mathcal{L}_N(\lfloor aN \rfloor, \lfloor bN \rfloor)] &= \sum_{n=k}^{\ell} \frac{p_n p_{N+1-n}}{p_{N+1}} \sim c_1 \sum_{n=k}^{\ell} \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{n} \sqrt{N+1-n}} \\ &= c_1 \sqrt{N+1} \sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{N+1}} \sqrt{1 - \frac{n}{N+1}}}. \end{aligned}$$

Le dernier terme est une somme de Riemann : si  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k}{N} = a$  et  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ell}{N} = b$ , on aboutit à

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{N+1}} \sqrt{1 - \frac{n}{N+1}}} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du.$$

Cela conclut la démonstration. □

### Le cas avec contrainte de mur.

**Proposition 1.26.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $k \geq k$*

$$E_N^+ [\mathcal{L}_N(k, N+1-k)] \leq C k^{-1/2}.$$

En particulier, pour  $k = 0$ , on obtient que  $\sup_N E_N^+ [\mathcal{L}_N] \leq C$ , c'est-à-dire qu'il y a un nombre fini (*i.e.* tendu) de contact. Par l'inégalité de Markov, on obtient par exemple que  $P_N^+ (\mathcal{L}_N \geq A) \leq C/A$ . On obtient aussi

$$P_N^+ (\exists n \in [k, N+1-k], S_n = 0) = P_N^+ (\mathcal{L}(k, N+1-k) \geq 1) \leq \frac{C}{\sqrt{k}}.$$

Cela montre que la probabilité d'avoir un contact avec le mur dur “loin du bord” est très faible.

*Démonstration.* On utilise la même démonstration que plus haut. Grâce à l'expression (1.11) et au Théorème 1.22, on obtient

$$E_N^+ [\mathcal{L}_N(k, N+1-k)] = \sum_{n=k}^{N+1-k} \frac{p_n^+ p_{N+1-n}^+}{p_{N+1}^+} \leq C_0 \sum_{n=k}^{N+1-k} \frac{(N+1)^{3/2}}{n^{3/2} (N+1-n)^{3/2}}.$$

En utilisant la symétrie de la dernière somme, on a

$$E_N^+ [\mathcal{L}_N(k, N+1-k)] \leq 2C_0 \sum_{n=k}^{(N+1)/2} \frac{1}{n^{3/2}} \frac{(N+1)^{-3/2}}{(N+1-n)^{3/2}} \leq 2^{5/2} C_0 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}},$$

où on a utilisé que  $N+1-n \geq (N+1)/2$  pour  $n \leq (N+1)/2$ . La conclusion en découle immédiatement.  $\square$

**Exercice 1.9.** Montrer qu'il existe un  $c > 0$  telle que  $P_N^+(\mathcal{L}_N = 0) \geq c$  pour tout  $N \geq 1$ .

### 1.3.2 Le cas du GFF en dimension $d \geq 3$

Pour simplifier les notations dans la suite, on supposera que  $\beta = 1$  et on enlèvera  $\beta$  de toutes les notations (voir la Remarque 1.11).

On considère ici le champ libre gaussien sur  $\mathbb{Z}^d$  tout entier (c'est-à-dire dans la limite de volume infini), dans sa version centrée (c'est-à-dire avec condition au bord  $\xi \equiv 0$ ). On rappelle, voir Théorème 1.16, qu'il s'agit d'un champ gaussien centré, de matrice de covariance  $(G(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$  la fonction de Green de la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^d$ . On notera pour simplifier sa loi  $P_\infty$  et on pose aussi  $G_0 := G(0, 0) = \text{Var}_\infty(\varphi_x)$ . On redonne l'asymptotique

$$G(x, y) \sim c_d \|x - y\|^{2-d} \quad \text{quand } \|x - y\| \rightarrow +\infty, \quad (1.12)$$

pour une constante  $c_d$  connue, voir la Remarque 1.13.

Soit  $D \subset \mathbb{R}^d$  un domaine compact de  $\mathbb{R}^d$ . On considère alors le domaine  $\Lambda_N \Subset \mathbb{Z}^d$  défini par

$$\Lambda_N = (ND) \cap \mathbb{Z}^d = \{x \in \mathbb{Z}^d, \frac{x}{N} \in D\},$$

qui est une dilatation (et une discrétisation) de  $D$ . On notera  $\Omega_N^+ = \Omega_{\Lambda_N}^+$  l'événement défini en (1.8) que le GFF est positif sur  $\Lambda_N^+$ .

On cherche alors à comprendre la loi  $P_\infty(\cdot \mid \Omega_N^+)$  du champ libre gaussien conditionné à être positif sur  $\Lambda_N$ . On a vu dans l'exemple de la dimension  $d = 1$  qu'une première étape pour comprendre les propriétés de  $P_\infty(\cdot \mid \Omega_N^+)$  est d'estimer la probabilité  $P_\infty(\Omega_N^+)$ .

**Théorème 1.27.** *En dimension  $d \geq 3$ , on a l'asymptotique :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{d-1} \log N} \log P_\infty(\Omega_N^+) = -2G_0 \text{Cap}(D), \quad (1.13)$$

où  $\text{Cap}(D)$  est une quantité intrinsèque au domaine  $D$ , appelée capacité, dont la définition est donnée plus bas en (1.17).

De plus, il existe une suite  $(a_N)_{N \geq 1}$  avec  $a_N \sim \sqrt{4GG_0 \log N}$  telle que :



- Pour  $\varepsilon > 0$ , on note  $Q_N^\varepsilon := \frac{1}{|\Lambda_N|} \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\frac{1}{a_N} \varphi_x \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]\}}$  la proportion de points dans  $\Lambda_N$  d'une hauteur proche de  $a_N$  : alors pour  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_\infty(|Q_N^\varepsilon - 1| > \eta \mid \Omega_N^+) = 0 \quad \text{pour tout } \eta > 0.$$

- La loi de  $\varphi - a_N$  sous  $P_\infty(\cdot \mid \Omega_N^+)$  converge faiblement vers  $P_\infty$ .

Ce théorème est démontré dans [BDZ95, DG99]. Nous allons essentiellement nous concentrer ici sur la démonstration d'une version plus faible de (1.13). On renvoie aux notes de cours [Gia01] pour une démonstration de (1.13), qui utilise des raffinements de la méthode proposé ci-dessous (elle-même empruntée à [Gia01]).

Quelques commentaires s'imposent. Premièrement, la probabilité décroît *moins vite* que  $e^{-cN^d}$ , qui serait le taux de décroissance qu'on obtiendrait si les  $(\varphi_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  étaient i.i.d. Cela signifie que la structure de covariance joue un rôle dans le comportement de la probabilité. Ensuite, les deux derniers points du théorème suggère que l'interface se soulève à une hauteur  $a_N \sim \sqrt{4G_0 \log N}$  et se comporte ensuite comme un GFF translaté de  $a_N$ . Le comportement asymptotique de  $P_\infty(\Omega_N^+)$  vient essentiellement du "coût" qu'il y a à soulever la surface au dessus de  $\Lambda_N$  ; la capacité de  $D$  apparaît en optimisant la manière dont la surface peut se soulever pour atteindre une hauteur  $\approx a_N$  au dessus de  $\Lambda_N$ . Ce discours permet de se faire une intuition d'une certaine "rigidité" de l'interface, dont le comportement est très différent de ce qu'il se passe en dimension  $d = 1$ .

### Borne inférieure sur $P_\infty(\Omega_N^+)$

**Proposition 1.28.** On a  $\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{d-2} \log N} P_\infty(\Omega_N^+) \geq -dG_0 \text{Cap}(D)$ .

Cette borne est presque celle annoncée dans le Théorème 1.27 : le facteur  $d$  devrait être remplacé par un facteur 2. L'adaptation de la preuve qui suit pour obtenir le bon comportement est donné dans les notes de cours [Gia01].

*Démonstration.* La stratégie de la démonstration est assez classique en probabilités (et en mécanique statistique) : il s'agit d'un changement de mesure. L'idée est la suivante :

- On introduit une autre loi  $\hat{P}$  (qui dépend de  $N$ ) pour laquelle  $\Omega_N^+$  devient un événement typique, c'est-à-dire telle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{P}(\Omega_N^+) = 1$ .
- On compare les probabilités  $P_\infty(\Omega_N^+)$  et  $\hat{P}(\Omega_N^+)$ , à l'aide d'une inégalité dite d'*entropie*, qui fait intervenir l'entropie relative  $\mathcal{H}(\hat{P} \mid P_\infty)$  de  $\hat{P}$  par rapport à  $P_\infty$ , voir le Lemme 1.29. Il reste simplement à estimer l'entropie relative  $\mathcal{H}(\hat{P} \mid P_\infty)$ .

*Étape (i). Introduction de la loi  $\hat{P}$ .* Soit  $\alpha_N \geq 0$  un réel et soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction  $\mathcal{C}_c^\infty$  (lisse à support compact) donnée, telle que  $f(x) = 1$  pour tout  $x \in D$ . On définit alors une fonction  $\psi = \psi_N : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  à support fini :

$$\psi_x := \alpha_N f\left(\frac{x}{N}\right).$$

On va soulever l'interface par la fonction  $\psi = \psi_N$  : on considère la loi  $\hat{P}$  de  $\varphi + \psi$ , où  $\varphi$  est un GFF de loi  $P_\infty$ .

Alors, comme  $\psi_x = \alpha_N$  pour tout  $x \in \Lambda_N$  et que  $\varphi_x \sim \mathcal{N}(0, G_0)$  sous  $P_\infty$ , on a

$$\hat{P}((\Omega_N^+)^c) = P_\infty(\exists x \in \Lambda_n, \varphi_x + \alpha_N \geq 0) \leq |\Lambda_N| P(\sqrt{G_0}Z \leq -\alpha_N),$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , par sous-additivité. En utilisant l'inégalité  $P(Z \leq -t) = P(Z \geq t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{-\frac{1}{2}t^2}$  pour  $t \geq 0$ , on obtient

$$\hat{P}((\Omega_N^+)^c) \leq \text{Vol}(D)N^d \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha_N} e^{-\frac{1}{2G_0}\alpha_N^2}.$$

Pour obtenir une quantité qui tend vers 0, il est naturel de choisir

$$\alpha_N := \sqrt{2dG_0 \log N}, \quad (1.14)$$

de sorte que la borne précédente donne  $\hat{P}((\Omega_N^+)^c) \leq C/\alpha_N \rightarrow 0$ . En conclusion, en prenant  $\alpha_N$  comme dans (1.14), on obtient  $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{P}(\Omega_N^+) = 1$  comme voulu.

*Étape (ii)-a. Inégalité d'entropie.*

**Lemme 1.29.** Soient  $\hat{P}$  et  $P$  deux mesures. On définit l'entropie relative de  $\hat{P}$  par rapport à  $P$  :

$$\mathcal{H}(\hat{P}|P) := \hat{E} \left[ \log \frac{d\hat{P}}{dP} \right] = E \left[ \frac{d\hat{P}}{dP} \log \frac{d\hat{P}}{dP} \right] \quad (1.15)$$

si  $\hat{P}$  est absolument continue par rapport à  $P$ , et  $\mathcal{H}(\hat{P}|P) = +\infty$  sinon.

Alors, pour tout événement  $A$ , on a l'inégalité

$$P(A) \geq \hat{P}(A) \exp \left( -\frac{1}{P(A)} (\mathcal{H}(\hat{P}|P) + e^{-1}) \right).$$

On laisse en exercice le soin de vérifier que l'on a toujours  $\mathcal{H}(\hat{P}|P) \geq 0$ .

*Démonstration.* Notons que l'on a

$$\frac{P(A)}{\hat{P}(A)} = \frac{1}{\hat{P}(A)} \hat{E} \left[ \frac{dP}{d\hat{P}} \mathbb{1}_A \right] = \hat{E} \left[ \frac{dP}{d\hat{P}} \mid A \right],$$

de sorte que grâce à l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\log \frac{P(A)}{\hat{P}(A)} \geq \hat{E} \left[ \log \frac{dP}{d\hat{P}} \mid A \right] = -\frac{1}{\hat{P}(A)} \hat{E} \left[ \left( \log \frac{dP}{d\hat{P}} \right) \mathbb{1}_A \right].$$

Il reste à estimer le dernier terme :

$$\begin{aligned} \hat{E} \left[ \left( \log \frac{dP}{d\hat{P}} \right) \mathbb{1}_A \right] &= E \left[ \left( \frac{dP}{d\hat{P}} \log \frac{dP}{d\hat{P}} \right) \mathbb{1}_A \right] \leq E \left[ \left( \frac{dP}{d\hat{P}} \log \frac{dP}{d\hat{P}} + e^{-1} \right) \mathbb{1}_A \right] \\ &\leq E \left[ \frac{dP}{d\hat{P}} \log \frac{dP}{d\hat{P}} + e^{-1} \right] = \mathcal{H}(\hat{P}|P) + e^{-1}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que  $x \log x + e^{-1} \geq 0$  pour la dernière inégalité. Cela conclut la démonstration du lemme.  $\square$

En combinant le Lemme 1.29 avec l'étape (i), cela montre que

$$P_\infty(\Omega_N^+) \geq (1 + o(1))C \exp\left(- (1 + o(1))\mathcal{H}(\hat{P}|P_\infty)\right).$$

*Étape (ii)-b. Estimation de  $\mathcal{H}(\hat{P}|P_\infty)$  et conclusion.* Pour estimer l'entropie relative  $\mathcal{H}(\hat{P}|P_\infty)$ , notons que  $\hat{P}$  est la loi d'un champ gaussien de moyenne  $\psi$  et de matrice de covariance  $G$ . Ainsi, comme  $\psi$  est à support fini (notons  $S$  le support de  $\psi$ ), la densité  $\frac{d\hat{P}}{dP_\infty}$  est nulle en dehors d'un compact : en utilisant la forme de la densité gaussienne, on a

$$\frac{d\hat{P}}{dP_\infty} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\langle \varphi - \psi, G^{-1}(\varphi - \psi) \rangle}}{e^{-\frac{1}{2}\langle \varphi, G^{-1}\varphi \rangle}},$$

de sorte que

$$\log \frac{d\hat{P}}{dP_\infty} = -\frac{1}{2}\langle \psi, G^{-1}\psi \rangle + \langle \varphi, G^{-1}\psi \rangle = \frac{1}{2}\langle \psi, G^{-1}\psi \rangle + \langle (\varphi - \psi), G^{-1}\psi \rangle.$$

Comme  $\hat{E}[\varphi_x] = \psi_x$ , on en déduit que<sup>2</sup>

$$\mathcal{H}(\hat{P}|P_\infty) = \hat{E}\left[\log \frac{d\hat{P}}{dP_\infty}\right] = \frac{1}{2}\langle \psi, G^{-1}\psi \rangle. \quad (1.16)$$

Dans notre cas où  $G^{-1} = -\Delta$ , on obtient, (comme dans le hamiltonien (1.6))

$$\mathcal{H}(\hat{P}|P_\infty) = \frac{1}{8d} \sum_{\substack{x, y \in \mathbb{Z}^d \\ x \sim y}} (\psi_x - \psi_y)^2 = \frac{1}{2} \alpha_N^2 \frac{1}{2d} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{y \sim x} \left(f\left(\frac{x}{N}\right) - f\left(\frac{y}{N}\right)\right)^2$$

où on a utilisé la forme de  $\psi$ . La somme sur  $\mathbb{Z}^d$  est une somme de Riemann (on rappelle que  $f$  est lisse et à support compact), on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{y \sim x} \left(\frac{1}{N} \left(f\left(\frac{x}{N}\right) - f\left(\frac{y}{N}\right)\right)\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla f(x)\|^2 dx.$$

Ainsi, quand  $N \rightarrow \infty$ , on a

$$\mathcal{H}(\hat{P}|P_\infty) = (1 + o(1)) \frac{1}{2} \alpha_N^2 N^{d-2} \frac{1}{2d} \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla f(x)\|^2 dx.$$

En se rappelant du choix (1.14) de  $\alpha_N$  et en optimisant sur le choix de la fonction  $f$  pour minimiser la dernière intégrale, on obtient

$$\mathcal{H}(\hat{P}|P_\infty) = (1 + o(1)) d G_0 N^{d-2} \log N \times \text{Cap}(D),$$

où

$$\text{Cap}(D) := \inf \left\{ \frac{1}{2d} \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla f(x)\|^2 dx ; f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d), f(x) = 1 \text{ pour tout } x \in D \right\}. \quad (1.17)$$

Cela conclut la démonstration de la Proposition 1.28.  $\square$

2. Noter que le calcul est général pour des vecteurs gaussiens de même matrice de covariance.

*Remarque 1.30.* La capacité (1.17) d'un compact  $D$  de  $\mathbb{R}^d$  est l'analogue mathématique de l'aptitude de l'ensemble  $D$  à posséder une charge électrique. La fonction  $f$  dans l'intégrale représente un potentiel entre l'ensemble  $D$  et l'infini, et  $f(y) - f(x)$  est l'intensité du courant entre  $y$  et  $x$ . L'intégrale  $\frac{1}{2d} \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla f(x)\|^2 dx$  est appelée *énergie de Dirichlet* associée au potentiel  $f$ .

### Borne supérieure sur $P_\infty(\Omega_N^+)$

**Proposition 1.31.** *On a  $\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{d-2} \log N} P_\infty(\Omega_N^+) \leq -C_D$ .*

Dans ce résultat, la constante  $C_D$  est explicite (voir la preuve), et dépend du domaine  $D$  et de la dimension.

Introduisons le vocabulaire suivant : on dit que  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$  est *pair* si  $\sum_{i=1}^d x_i$  est pair ; on dit que  $x \in \mathbb{Z}^d$  est *impair* si  $\sum_{i=1}^d x_i$  est impair. On notera

$$\Lambda_N^{\text{pair}} = \{x \in \Lambda_N, x \text{ pair}\}, \quad \Lambda_N^{\text{imp}} = \{x \in \Lambda_N, x \text{ impair}\}.$$

*Démonstration.* L'idée est de conditionner par  $\mathcal{F}_{\Lambda_N^{\text{imp}}}$ , *i.e.* par les valeurs du GFF sur les sites impairs. En effet, un site  $x \in \Lambda_N^{\text{pair}}$  est entouré de sites impairs, donc d'après la propriété de Markov spatiale (Proposition 1.5), conditionner par  $\mathcal{F}_{\Lambda_N^{\text{imp}}}$  revient à fixer la valeur de tous les voisins de  $x \in \Lambda_N^{\text{pair}}$ . Conditionnellement à  $\mathcal{F}_{\Lambda_N^{\text{imp}}}$ , *i.e.* à la valeur du GFF  $\phi$  sur  $\Lambda_N^{\text{imp}}$ , les  $(\varphi_x)_{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}}$  sont donc des variables gaussiennes indépendantes, de moyenne  $m_x^\phi = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} \phi_y$  (il s'agit du prolongement harmonique de  $\phi$  en  $x$ ) et de variance 1 (partant de  $x$ , la marche aléatoire sort en un pas de  $\Lambda_N^{\text{pair}}$ , donc le nombre de passage en  $x$  est exactement 1).

En conditionnant par rapport à  $\mathcal{F}_{\Lambda_N^{\text{imp}}}$  et en utilisant la propriété de Markov spatiale, on obtient donc

$$P_\infty(\Omega_N^+) = E_\infty \left[ P_{\Lambda_N^{\text{pair}}}^\phi(\Omega_{\Lambda_N^{\text{pair}}}^+) \mathbb{1}_{\Omega_{\Lambda_N^{\text{imp}}}^+} \right] = E_\infty \left[ \left\{ \prod_{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}} P(Z + m_x^\phi > 0) \right\} \mathbb{1}_{\Omega_{\Lambda_N^{\text{imp}}}^+} \right]$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . En écrivant  $P(Z + m_x^\phi > 0) = P(Z < m_x^\phi) = 1 - P(Z > m_x^\phi) \leq \exp(-P(Z > m_x^\phi))$ , on en déduit l'inégalité :

$$P_\infty(\Omega_N^+) \leq E_\infty \left[ \exp \left( - \sum_{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}} P(Z > m_x^\phi) \right) \mathbb{1}_{\Omega_{\Lambda_N^{\text{imp}}}^+} \right].$$

On va découper cette espérance en deux parties (selon que le terme  $\sum_{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}} P(Z > m_x^\phi)$  soit grand ou non). Soit  $0 < \varepsilon < 1$ . On introduit l'événement (de  $\mathcal{F}_{\Lambda_N^{\text{imp}}}$ )

$$A_N := \left\{ \left| \{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}, m_x^\phi \geq (1 - \varepsilon) \sqrt{4 \log N}\} \right| \geq (1 - \varepsilon) |\Lambda_N^{\text{imp}}| \right\}$$

qui nous dit que la grande majorité des moyennes  $m_x^\phi = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} \phi_y$  sont élevées.

*Étape 1. Sur l'événement  $A_N^c$ .* Sur l'événement  $A_N^c$ , il y a au moins  $\varepsilon |\Lambda_N^{\text{pair}}|$  sites  $x \in \Lambda_N^{\text{pair}}$  tels que  $m_x^\phi \geq (1 - \varepsilon) \sqrt{4 \log N}$  : on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}} \mathbb{P}(Z > m_x^\phi) &\geq \varepsilon |\Lambda_N^{\text{imp}}| \mathbb{P}(Z > (1 - \varepsilon) \sqrt{4 \log N}) \\ &\geq c_\varepsilon N^d \frac{1}{\sqrt{\log N}} e^{-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 4 \log N} \geq N^{d-2+2\varepsilon+o(1)}. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\mathbb{P}_\infty(\Omega_N^+ \cap A_N^c) \leq \mathbb{E}_\infty \left[ \exp \left( - \sum_{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}} \mathbb{P}(Z > m_x^\phi) \right) \mathbb{1}_{A_N^c} \right] \leq \exp \left( - N^{d-2+2\varepsilon+o(1)} \right),$$

qui est, on le sait déjà, négligeable comparé à  $\mathbb{P}_\infty(\Omega_N^+)$  (d'après la Proposition 1.28).

*Étape 2. Sur l'événement  $A_N$ .* Notons que si  $A_N$  est vérifié, alors sur l'événement  $\Omega_{\Lambda_N^{\text{imp}}}^+$ , comme tous les  $m_x^\phi$  sont positifs, on a

$$\sum_{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}} m_x^\phi \geq (1 - \varepsilon)^2 |\Lambda_N^{\text{imp}}| \sqrt{4 \log N}.$$

En utilisant la définition de  $m_x^\phi$ , on a

$$\sum_{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}} m_x^\phi = \frac{1}{2d} \sum_{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}} \sum_{y \sim x} \phi_y = \sum_{y \in \Lambda_N^{\text{imp}}} \phi_y.$$

Ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\infty(\Omega_N^+ \cap A_N) &\leq \mathbb{E}_\infty \left[ \exp \left( - \sum_{x \in \Lambda_N^{\text{pair}}} \mathbb{P}(Z > m_x^\phi) \right) \mathbb{1}_{\Omega_{\Lambda_N^{\text{imp}}}^+ \cap A_N} \right] \\ &\leq \mathbb{P}_\infty(\Omega_{\Lambda_N^{\text{imp}}}^+ \cap A_N) \leq \mathbb{P}_\infty \left( \sum_{y \in \Lambda_N^{\text{imp}}} \phi_y \geq (1 - \varepsilon)^2 |\Lambda_N^{\text{imp}}| \sqrt{4 \log N} \right). \end{aligned}$$

Il reste simplement à observer que, sous  $\mathbb{P}_\infty$ , la somme  $\sum_{y \in \Lambda_N^{\text{imp}}} \phi_y$  est une variable gaussienne centrée, de variance  $\sigma_N^2 = \sum_{x, y \in \Lambda_N^{\text{imp}}} G(x, y)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\infty(\Omega_N^+ \cap A_N) &\leq \exp \left( - \frac{1}{2\sigma_N^2} (1 - \varepsilon)^4 4 \log N |\Lambda_N^{\text{imp}}|^2 \right) \\ &= \exp \left( - \frac{N^{d+2}}{\sigma_N^2} (1 - \varepsilon)^4 \text{Vol}(D) N^{d-2} \log N \right). \end{aligned}$$

Pour estimer  $\sigma_N^2$ , on peut utiliser l'asymptotique (1.12)  $G(x, y) \sim c_d \|x - y\|^{2-d}$  : en posant  $\mathcal{G}_N(a, b) = N^{d-2} G(aN, bN)$ , par une somme de Riemann, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N/2)^{2d}} \sum_{x,y \in \Lambda_N^{\text{imp}}} \mathcal{G}_N\left(\frac{x}{N}, \frac{y}{N}\right) = c_d \int_{D \times D} \mathcal{G}(x,y) dx dy,$$

où  $\mathcal{G}(x,y) = \|x - y\|^{2-d}$ . On en déduit que, quand  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\sigma_N^2 = \sum_{x,y \in \Lambda_N^{\text{imp}}} G(x,y) \sim N^{2-d} \times (N/2)^{2d} c_d \int_{D \times D} \mathcal{G}(x,y) dx dy = C_d N^{d+2},$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### Propriétés trajectorielles sous la loi conditionnelle

Au cours de la démonstration, on a montré que  $P_\infty(\Omega_N^+ \cap A_N^c) = o(P_\infty(\Omega_N^+))$ . On en déduit facilement que  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_\infty(A_N^c \mid \Omega_N^+) = 0$ . On peut procéder de même pour une définition de  $A_N$  où on aurait échangé les rôles de  $\Lambda_N^{\text{pair}}$  et  $\Lambda_N^{\text{imp}}$ . On peut en déduire le corollaire suivant, qui donne des précisions sur le comportement de l'interface sous la loi conditionnelle  $P_\infty(\cdot \mid \Omega_N^+)$ .

**Corollaire 1.32.** *Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\tilde{A}_N$  l'événement :*

$$\tilde{A}_N := \left\{ \left| \left\{ x \in \Lambda_N, \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} \varphi_y \geq (1 - \varepsilon) \sqrt{4 \log N} \right\} \right| \geq (1 - \varepsilon) |\Lambda_N| \right\}$$

*Alors on a  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_\infty(\tilde{A}_N \mid \Omega_N^+) = 1$ .*

**Exercice 1.10.** Montrer le résultat ci-dessus, puis montrer le même résultat pour l'événement  $\bar{A}_N = \left\{ \frac{1}{|\Lambda_N|} \sum_{x \in \Lambda_N} \varphi_x \geq (1 - \varepsilon) \sqrt{4 \log N} \right\}$ .

### 1.3.3 Le cas du GFF en dimension $d = 2$

Donnons simplement un énoncé dans le cas de la dimension  $d = 2$ , où il n'y a pas de mesure de Gibbs en volume infini. On considère deux compacts  $D \subset V$  de  $\mathbb{R}^2$  “bien séparés” (c'est-à-dire  $d(D, \partial V) > 0$ ) et on pose  $\Lambda_N = ND \cap \mathbb{Z}^d$  et  $V_N = NV \cap \mathbb{Z}^d$ . On a alors le résultat suivant, démontré dans [BDG01].

**Théorème 1.33.** *On a*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log N)^2} \log P_{V_N}^0(\Omega_{\Lambda_N}^+) = -4g \text{Cap}_V(D),$$

où  $\text{Cap}_V(D) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla f(x)\|^2 dx, f \geq 1 \text{ sur } D, f = 0 \text{ sur } V^c \right\}$  et  $g = \frac{2}{\pi}$ .

*De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\sup_{x \in \Lambda_N} P_{V_N}^0 \left( \left| \frac{\varphi_x}{2\sqrt{g} \log N} - 1 \right| > \varepsilon \mid \Omega_{\Lambda_N}^+ \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

## 1.4 Quelques exercices

Dans cette section, pour simplifier, on considère le domaine  $\Lambda_N = \{1, \dots, N\}^d$ . On note  $P_N := P_{\Lambda_N}^0$  la loi d'un champ libre gaussien sur  $\Lambda_N$  avec condition au bord 0. On notera aussi  $G_N(x, y) = G_{\Lambda_N}(x, y)$  la fonction de Green à l'intérieur de  $\Lambda_N$ , *i.e.* la fonction de Green d'une marche aléatoire tuée lorsqu'elle sort de  $\Lambda_N$ .

### Adaptation des Propositions 1.28 et 1.31 au cas $P_{\Lambda_N}^0$

Essayons (en exercice) d'adapter la démonstration du comportement asymptotique de  $P_\infty(\Omega_N^+)$ , c'est-à-dire des Propositions 1.28-1.31, au cas d'un champ libre gaussien en volume fini.

Le but est de montrer le résultat suivant.

**Proposition 1.34.** *Il existe des constantes  $c_d, c'_d > 0$  telles que*

$$\begin{aligned} -c_d &\leq \frac{1}{N^{d-1} \log N} \log P_N(\Omega_N^+) \leq -c'_d && \text{en dimension } d \geq 3, \\ -c_2 &\leq \frac{1}{N(\log N)^2} \log P_N(\Omega_N^+) \leq -c'_2 && \text{en dimension } d = 2. \end{aligned}$$

#### Exercice 1.11 (Borne inférieure).

1. On note  $\sigma_N^2 = \max_{x \in \Lambda_N} \text{Var}_N(\varphi_x)$ . Montrer que  $\sigma_N^2 \asymp 1$  si  $d \geq 3$  et  $\sigma_N^2 \asymp \log N$  si  $d = 2$ .
2. On considère  $(\alpha_N)_{N \geq 0}$  une suite de réels positifs telle que  $\alpha_N \rightarrow +\infty$ . Pour  $\varphi$  de loi  $P_N$ , on note  $\hat{P}_N$  la loi de  $\varphi + \alpha_N$ .
  - a. Montrer que  $\hat{P}_N(\Omega_N^+) \geq 1 - N^d P(Z < -\frac{\alpha_N}{\sigma_N})$ , où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
  - b. À quelle condition sur  $\alpha_N$  a-t-on  $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{P}_N(\Omega_N^+) = 1$  ?
3. Calculer l'entropie relative  $\mathcal{H}(\hat{P}_N | P_N)$ .
4. Conclure pour obtenir les bornes inférieures de la Proposition 1.34 (en dimensions  $d = 2$  et  $d \geq 3$ ).

#### Exercice 1.12 (Conséquence de la borne inférieure). On pose

$$A_N = \{|\{x \in \Lambda_N, \varphi_x \geq C_d \alpha_N\}| \geq k_N\},$$

où  $k_N$  est une quantité que l'on va déterminer.

1. Montrer que  $\mathbf{P}_N^0(A_N) \leq \binom{N^d}{k_N} \mathbf{P}(\sigma_N Z \geq (1 + \varepsilon) C_d \alpha_N)^{k_N}$ , où  $\sigma_N^2 = \sup_{x \in \Lambda_N} G_{\Lambda_N}(x, x)$  et  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
2. En déduire que si  $\frac{k_N}{N^{d-1} \alpha_N^2} \rightarrow +\infty$ , on a  $\mathbf{P}_N^0(A_N) \leq \exp(-2N^{d-1} \alpha_N^2)$  pour  $N$  assez grand.
3. On prend  $k_N$  comme ci-dessus. Montrer que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_N^0(A_N | \Omega_N^+) = 0$ .

#### Exercice 1.13 (Borne supérieure). On pose $\Gamma_N = \{x \in \Lambda_N, x \text{ pair}, d(x, \Lambda_N^c) = 1\}$ .

1. Montrer que

$$P_N(\Omega_N^+) = E_N \left[ \prod_{x \in \Gamma_N} P(Z < m_x^\phi) \mathbb{1}_{\tilde{\Omega}_N^+} \right],$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et où  $\tilde{\Omega}_N^+ = \{\phi_x > 0, \forall x \in \Lambda_N \setminus \Gamma_N\}$ .

On rappelle la notation  $m_x^\phi = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} \phi_y$ .

On note  $A_N$  l'événement  $\left\{ |\{x \in \Gamma_N, m_x^\phi \leq c_d \sqrt{\log N}\}| \leq \varepsilon N^{d-1} \right\}$ , où  $c_d$  est une constante à déterminer et  $\varepsilon > 0$  est fixé.

2. Montrer que

$$E_N \left[ \prod_{x \in \Gamma_N} P(Z < m_x^\phi) \mathbb{1}_{\tilde{\Omega}_N^+} \mathbb{1}_{A_N^c} \right] \leq P(Z < c_d \sqrt{\log N})^{\varepsilon N^{d-1}}.$$

Pour quelles valeurs de  $c_d$  a-t-on  $P(Z < c_d \sqrt{\log N})^{\varepsilon N^{d-1}} = o(P_N(\Omega_N^+))$  ?

3. Montrer que

$$E_N \left[ \prod_{x \in \Gamma_N} P(Z < m_x^\phi) \mathbb{1}_{\tilde{\Omega}_N^+} \mathbb{1}_{A_N} \right] \leq P_N \left( \sum_{x \in \Gamma_N} m_x^\phi \geq c_d(1 - \varepsilon) N^{d-1} \sqrt{\log N}, \tilde{\Omega}_N^+ \right).$$

4. Montrer que si  $\phi_x > 0$  pour tout  $x \in \Lambda_N \setminus \Gamma_N$  alors  $\sum_{x \in \Gamma_N} m_x^\phi \leq M_{\tilde{\Gamma}_N^{(1)}} + \frac{1}{2d} M_{\tilde{\Gamma}_N^{(2)}}$ , où

$$\tilde{\Gamma}_N^{(1)} = \{x \in \Lambda_N \text{ impair}, d(x, \Lambda_N^c) = 1\}, \quad \tilde{\Gamma}_N^{(2)} = \{x \in \Lambda_N \text{ impair}, d(x, \Lambda_N^c) = 2\}$$

et où  $M_\Gamma = \sum_{x \in \Gamma} \phi_x$ . En déduire que

$$E_N \left[ \prod_{x \in \Gamma_N} P(Z < m_x^\phi) \mathbb{1}_{\Omega_N^+} \mathbb{1}_{A_N^c} \right] \leq P_N \left( M_{\tilde{\Gamma}_N^{(1)}} + \frac{1}{2d} M_{\tilde{\Gamma}_N^{(2)}} \geq c_d(1 - \varepsilon) N^{d-1} \sqrt{\log N} \right).$$

5. En déduire que pour  $c_d$  choisi comme ci dessus,

$$(1 + o(1)) P_N(\Omega_N^+) \leq P_N \left( M_{\tilde{\Gamma}_N^{(1)}} \geq \frac{1}{2} c_d(1 - \varepsilon) N^{d-1} \sqrt{\log N} \right) \\ + P_N \left( M_{\tilde{\Gamma}_N^{(2)}} \geq d c_d(1 - \varepsilon) N^{d-1} \sqrt{\log N} \right).$$

6. Montrer que  $M_\Gamma$  est une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance  $\sigma_\Gamma^2 := \sum_{x \in \Gamma} \mathbb{E}_x[V_\Gamma]$  où  $V_\Gamma = \sum_{i=1}^{T_{\Lambda_N^c}} \mathbb{1}_{S_i \in \Gamma}$  est le nombre de visites d'une marche simple à  $\Gamma$  avant de sortir de  $\Lambda_N$ . Montrer que les variances de  $M_{\tilde{\Gamma}_N^{(1)}}$  et  $M_{\tilde{\Gamma}_N^{(2)}}$  sont majorées par

une constante fois  $N^{d-1}$ .

7. Conclure pour obtenir les bornes supérieures de la Proposition 1.34 (en dimensions  $d = 2$  et  $d \geq 3$ ).



## Probabilité que le GFF reste petit dans un domaine donné

On donne maintenant un autre lemme utile qui donne un complément à la borne supérieure donnée en Exercice 1.3, dans le cas où on ne demande à avoir  $|\varphi_x| \leq 1$  que dans un sous-domaine  $\Gamma \subset \Lambda_N$ .

**Lemme 1.35.** Soit  $\Gamma \subset \Lambda_N$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour  $N \geq 2$

$$P_N^0(|\varphi_x| \leq 1 \text{ pour tout } x \in \Gamma) \geq e^{-c\alpha_N^2|\Gamma|},$$

où  $\alpha_N = \log N$  en dimension  $d = 2$  et  $\alpha_N = \sqrt{\log N}$  en dimension  $d \geq 3$ .

**Exercice 1.14 (Démonstration du Lemme 1.35).** L'Exercice 1.6 montre que l'on peut choisir une constante  $c > 0$  telle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N^0(\max_{x \in \Lambda_N} |\varphi_x| \geq c\alpha_N) = 0$ ; on se fixe une telle constante dans la suite. Pour un ensemble  $\Upsilon$ , on note  $\Upsilon^{\text{pair}} = \{x \in \Upsilon, x \text{ pair}\}$  et  $\Upsilon^{\text{imp}} = \{x \in \Upsilon, x \text{ impair}\}$ .

1. En conditionnant par  $\mathcal{F}_{\Lambda_N^{\text{imp}}}$ , montrer que

$$P_N^0(|\varphi_x| \leq 1 \forall x \in \Gamma) \geq E_N^0 \left[ \left\{ \prod_{x \in \Gamma^{\text{pair}}} P(|Z + m_x^\phi| \leq 1) \right\} \mathbf{1}_{\{|\varphi_x| \leq 1 \forall x \in \Gamma^{\text{imp}}\}} \right],$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $m_x^\phi = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} \phi_y$ .

2. Montrer que  $P(|Z + m_x^\phi| \leq 1) \geq 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(1+|m_x^\phi|)^2}$ . En déduire que

$$\begin{aligned} P_N^0(|\varphi_x| \leq 1 \forall x \in \Gamma) &\geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(1+c\alpha_N)^2|\Gamma^{\text{pair}}|} P_N^0(|\varphi_x| \leq 1 \forall x \in \Gamma^{\text{imp}}; |\varphi_x| \leq c\alpha_N \forall x \in \Lambda_N^{\text{imp}}). \end{aligned}$$

3. En procédant de la même manière (c'est-à-dire en conditionnant par  $\mathcal{F}_{\Lambda_N^{\text{pair}}}$ ), montrer que

$$\begin{aligned} P_N^0(|\varphi_x| \leq 1 \forall x \in \Gamma^{\text{imp}}; |\varphi_x| \leq c\alpha_N \forall x \in \Lambda_N^{\text{imp}}) &\geq e^{-\frac{1}{2}(1+c\alpha_N)^2|\Gamma^{\text{imp}}|} P_N^0(|\varphi_x| \leq c\alpha_N \forall x \in \Lambda_N). \end{aligned}$$

4. Conclure la démonstration du Lemme, en utilisant l'Exercice 1.6.

*Remarque 1.36.* On peut facilement adapter la démonstration pour obtenir que si  $M_N = o(\log N)$  quand  $N \rightarrow \infty$ , alors

$$\inf_{\xi: \partial\Lambda_N \rightarrow [-M_N, M_N]} P_N^\xi(|\varphi_x| \leq 1 \text{ pour tout } x \in \Gamma) \geq e^{-c\alpha_N^2|\Gamma|},$$

où l'infimum est pris sur les conditions au bord telles que  $\sup_{x \in \Lambda_N} |\xi_x| \leq M_N$ . Il suffit en effet de voir que l'Exercice 1.6 montre que  $P_N^\xi(\max_{x \in \Lambda_N} |\varphi_x| \geq c\alpha_N) \rightarrow 0$  uniformément en  $\xi: \partial\Lambda_N \rightarrow [-M_N, M_N]$ .

## Chapitre 2

# Modèles d'accrochage (pinning et wetting)

Le but de cette section est d'étudier l'effet d'une interaction entre une interface en dimension  $d + 1$  et un hyperplan  $\mathbb{Z}^d \times \{0\}$ . On considérera les deux cas vu dans la section précédente : le cas sans contrainte, c'est-à-dire quand la hauteur de l'interface peut prendre des valeurs négatives ; le cas avec contrainte de mur dur, quand la hauteur de l'interface est conditionné à rester positive.

## 2.1 Introduction du modèle et premières propriétés

Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ . Pour des paramètres  $\beta \geq 0$  et  $u \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  et une condition au bord  $\xi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , on considère les mesures de Gibbs suivante :

$$\frac{dP_{\Lambda, \beta, u}^\xi}{d\mu} = \frac{1}{W_{\Lambda, \beta, u}^\xi} \exp \left( -\beta H_\Lambda^\xi(\varphi) + u \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{1}_{\{|\varphi_x| \leq a\}} \right)$$

et

$$\frac{dP_{\Lambda, \beta, u}^{\xi, +}}{d\mu} = \frac{1}{W_{\Lambda, \beta, u}^{\xi, +}} \exp \left( -\beta H_\Lambda^\xi(\varphi) + u \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{1}_{\{\varphi_x \in [0, a]\}} \right) \mathbb{1}_{\Omega_\Lambda^+}(\varphi).$$

Dans les notations précédentes, on a gardé tous les paramètres du modèle ; les quantités  $W_{\Lambda, \beta, u}^\xi$  et  $W_{\Lambda, \beta, u}^{\xi, +}$  sont les fonctions de partition du modèle (quand  $u = 0$ , on retrouve les fonctions de partition définies précédemment). Pour simplifier, on va considérer dans la suite uniquement le cas  $\beta = 1$  et on l'omettra des notations ; on omettra aussi la dépendance en le paramètre  $a > 0$ , qui est fixé une fois pour toute (par exemple,  $a = \frac{1}{2}$ ).

Les mesures de Gibbs introduites plus haut correspondent à modifier la loi  $P_\Lambda^\xi$  de l'interface en introduisant une interaction avec l'hyperplan  $\mathbb{Z}^d \times \{0\}$ , quand l'interface est à une hauteur inférieure à  $a$  ; on parle alors de *contact* entre l'interface et l'hyperplan. Le paramètre  $u$  règle l'intensité de l'interaction : si  $u < 0$ , l'hyperplan est répulsif (l'interface est pénalisée si elle a beaucoup de contacts avec l'hyperplan) ; si  $u > 0$ , l'hyperplan est attractif (l'interface est favorisée si elle a beaucoup de contacts).

On écrira plutôt les mesures de Gibbs  $P_{\Lambda, u}^\xi$  et  $P_{\Lambda, u}^{\xi, +}$  en référence à la mesure  $P_\Lambda^\xi$ , de la manière suivante :

$$\frac{dP_{\Lambda, u}^\xi}{dP_\Lambda^\xi} = \frac{1}{Z_{\Lambda, u}^\xi} \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a \right) \quad \text{et} \quad \frac{dP_{\Lambda, u}^{\xi, +}}{dP_\Lambda^\xi} = \frac{1}{Z_{\Lambda, u}^{\xi, +}} \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a \right) \mathbb{1}_{\Omega_\Lambda^+}(\varphi), \quad (2.1)$$

où on a posé  $\delta_x^a := \mathbb{1}_{\{|\varphi_x| \leq a\}}$  pour simplifier. Les fonctions de partitions sont données par les expressions suivantes :

$$Z_{\Lambda,u}^\xi = \frac{W_{\Lambda,u}^\xi}{W_{\Lambda,u=0}^\xi} = E_\Lambda^\xi \left[ \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a \right) \right] \quad (2.2)$$

et

$$Z_{\Lambda,u}^{\xi,+} = \frac{W_{\Lambda,u}^{\xi,+}}{W_{\Lambda,u=0}^\xi} = E_\Lambda^\xi \left[ \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a \right) \mathbb{1}_{\Omega_\Lambda^+(\varphi)} \right].$$

En particulier, pour  $u = 0$ , on a  $Z_{\Lambda,u=0}^\xi = 1$  et  $Z_{\Lambda,u=0}^{\xi,+} = P_\Lambda^\xi(\Omega_\Lambda^+)$ . Pour la mesure sans contrainte, on parle de *modèle d'accrochage* (pinning model); pour la mesure avec contrainte de mur dur, on parle de *modèle de mouillage* (wetting model).

Le but général est de comprendre le comportement de l'interface sous  $P_{\Lambda,u}^\xi$  et  $P_{\Lambda,u}^{\xi,+}$ , en fonction du paramètre  $u \in \mathbb{R}$ . On se concentrera sur le cas  $\Lambda_N = \{1, \dots, N-1\}^d$  et dans la plupart des cas sur la condition au bord  $\xi \equiv 0$ . On notera d'ailleurs  $P_{N,u}^0$  et  $P_{N,u}^+$ , resp.  $Z_{N,u}^0$  et  $Z_{N,u}^+$ , les mesures de Gibbs, resp. les fonctions de partition, dans ce cas.

Enfin, on va se concentrer : en dimension  $d = 1$  sur le cas discret; en dimension  $d \geq 2$  sur le cas du GFF.

### 2.1.1 Énergie libre et premières propriétés

**Définition 2.1.** On définit l'énergie libre (sans/avec contrainte) avec condition au bord nulle comme la limite suivante :

$$F^0(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nd} \log Z_{N,u}^0, \quad F^+(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nd} \log Z_{N,u}^+. \quad (2.3)$$

La “vraie” définition de l'énergie libre serait  $F^{0/+}(u) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_{\Lambda,u}^{0/+}$ , mais on se concentre sur la définition (3.11), plus facilement manipulable.

**Proposition 2.2.** On a les propriétés suivantes :

- (i) Les limites dans (3.11) existent;
- (ii) Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , on a  $0 \leq F^+(u) \leq F^0(u) \leq \max(u, 0)$ ; notamment  $F^{0/+}(u) = 0$  pour tout  $u \leq 0$ .
- (iii) Les applications  $u \mapsto F^{0/+}(u)$  sont croissantes et convexes.

La démonstration du point (i), notamment au cas de la dimension  $d \geq 2$ , est un peu technique et on reporte la démonstration à un peu plus bas, voir la Section 2.1.3

*Démonstration.* Commençons par démontrer le point (ii). On a l'inégalité

$$Z_{N,u}^0 \geq Z_{N,u}^+ \geq E_N^0 \left[ \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right) \mathbb{1}_{\{\varphi_x > a \forall x \in \Lambda_N\}} \right] = P_N^0(\varphi_x > a \forall x \in \Lambda_N),$$

car, sur l'événement introduit, tous les  $\delta_x^a$  sont nul. Maintenant, en dimension  $d \geq 2$  (pour le GFF), il n'y a qu'à adapter la démonstration de la Proposition 1.34 pour obtenir qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour  $N \geq 2$

$$Z_{N,u}^+ \geq P_N^0(\varphi_x > a \forall x \in \Lambda_N) \geq e^{-c_0 N^{d-1} \log N}. \quad (2.4)$$

En dimension  $d = 1$ , pour une surface discrète, en prenant  $a < 1$  la borne inférieure que l'on obtient est  $Z_{N,u}^+ \geq P(S_N = 0, S_k > 0 \forall 1 \leq k \leq N-1) \geq cN^{-3/2}$ , grâce au Théorème 1.22. En prenant le log, en divisant par  $N^d$  est en prenant la limite, on obtient bien  $F^0(u) \geq F^+(u) \geq 0$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .

Pour montrer que  $F^{0/+}$  est nulle pour  $u \leq 0$ , il suffit d'observer qu'à partir de (2.2), on a clairement  $Z_{N,u}^{0/+} \leq 1$  pour  $u \leq 0$ . Ainsi,  $\log Z_{N,u}^{0/+} \leq 0$  et on obtient  $F^{0/+}(u) \leq 0$  pour tout  $u \leq 0$ . Quand  $u \geq 0$ , en majorant simplement  $\delta_x^0$  par 1 dans (2.2), on obtien directement que  $Z_{N,u}^{0/+} \leq \exp(u|\Lambda_N|)$  pour  $u \geq 0$ . En prenant le logarithme, en divisant par  $N^d$  et en prenant la limite  $N \rightarrow \infty$ , on obtient  $F^{0/+}(u) \leq u$  pour tout  $u \geq 0$ .

Montrons maintenant le point (iii). Posons, pour  $N \geq 1$ ,

$$F_N^0(u) := \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0, \quad F_N^+(u) := \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^+.$$

Il suffit de montrer que, pour tout  $N \geq 1$ , l'application  $u \mapsto F_N^{0/+}(u)$  est croissante et convexe, car la limite (simple) d'une suite de fonctions croissantes et convexes est elle-même croissante et convexe.

La croissance de  $F_N^{0/+}$  en  $u$  est claire car  $u \mapsto Z_{N,u}^{0/+}$  est croissante, en tant qu'espérance d'une fonction croissante en  $u$  (pour toute réalisation de  $\varphi$ , car  $\delta_x^a \geq 0$ ). Une autre manière de voir la croissance de  $F_N^{0/+}$ , qui nous sera utile par la suite, est simplement de la dériver. Faisons le pour  $F_N^+$ , l'analogue pour  $F_N^0$  étant évident : au vu de (2.2), on a

$$\begin{aligned} N^d \frac{\partial}{\partial u} F_N^+(u) &= \frac{\partial}{\partial u} \log Z_{N,u}^+ = \frac{1}{Z_{N,u}^+} E_N^0 \left[ \left( \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right) \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right) \mathbb{1}_{\Omega_{\Lambda_N}^+}(\varphi) \right] \\ &= E_{N,u}^+ \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ainsi, il est clair que  $\frac{\partial}{\partial u} F_N^+(u) \geq 0$ , donc que  $F_N^+$  est croissante.

Pour montrer la convexité de  $F_N^{0/+}$ , on calcul sa dérivée seconde. En reprenant le calcul (2.5) (et en se rappelant de l'expression (2.2)), on a

$$\begin{aligned} N^d \frac{\partial^2}{\partial u^2} F_N^+(u) &= \frac{1}{Z_{N,u}^+} E_N^0 \left[ \left( \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right)^2 \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right) \mathbb{1}_{\Omega_{\Lambda_N}^+}(\varphi) \right] \\ &\quad - \frac{1}{(Z_{N,u}^+)^2} E_N^0 \left[ \left( \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right)^2 \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right) \mathbb{1}_{\Omega_{\Lambda_N}^+}(\varphi) \right]^2 \\ &= E_{N,u}^+ \left[ \left( \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right)^2 \right] - E_{N,u}^+ \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right]^2 = \text{Var}_{N,u}^+ \left( \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right) \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre la convexité de  $u \mapsto F_N^+(u)$ . □

### 2.1.2 Transition de phase

Le fait que les énergies libres  $F^0$  et  $F^+$  soit croissantes et convexes permet de définir les points critiques suivants :

$$\begin{aligned} u_c^0 &:= \sup \{u \in \mathbb{R}, F^0(u) = 0\} = \inf \{u \in \mathbb{R}, F^0(u) > 0\}, \\ u_c^+ &:= \sup \{u \in \mathbb{R}, F^+(u) = 0\} = \inf \{u \in \mathbb{R}, F^+(u) > 0\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ces points critiques  $u_c^{0/+}$  marquent une transition de phase, que l'on appelle *transition d'accrochage*.

Rappelons le calcul fait en (2.5) : on a montré que  $\frac{\partial}{\partial u} F_N^{0/+} = E_{N,u}^{0/+} \left[ \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right]$ , c'est-à-dire que la dérivée de  $F_N^{0/+} = \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^{0/+}$  est la densité moyenne de contacts sous  $P_{N,u}^{0/+}$ . On peut maintenant utiliser le fait suivant :

*Fait.* Si  $(f_N)_{N \geq 1}$  est une suite de fonctions convexes qui converge simplement vers  $f$ , alors  $f$  est convexe et en tout point  $x$  où  $f$  est dérivable (c'est-à-dire pour tous sauf au plus un nombre dénombrable de  $x$ ), on a  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

Ainsi, en tout  $u \in \mathbb{R}$  où la dérivée  $\frac{\partial}{\partial u} F^{0/+}$  existe<sup>1</sup> (notamment pour  $u < 0$ ), on a

$$\frac{\partial}{\partial u} F^{0/+} = \lim_{N \rightarrow \infty} E_{N,u}^{0/+} \left[ \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right]. \quad (2.7)$$

On en déduit la description suivante de la transition de phase :

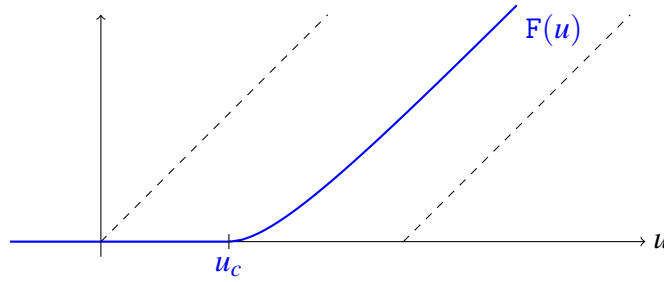
- Si  $u < u_c^{0/+}$ , alors  $F^{0/+} = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial u} F^{0/+} = 0$ . Ainsi, la densité asymptotique de contacts sous  $P_{N,u}^{0/+}$  est nulle et on parle de phase *délocalisée*.
- Si  $u > u_c^{0/+}$ , alors  $F^{0/+} > 0$  et par convexité  $\frac{\partial}{\partial u} F^{0/+} > 0$  (si la dérivée existe, ce qui est en pratique le cas). Ainsi, la densité asymptotique de contacts sous  $P_{N,u}^{0/+}$  est strictement positive et on parle de phase *localisée*.

Les principales questions auxquelles on souhaitera répondre dans la suite sont les suivantes : (i) est-on capable de calculer  $u_c^0$  ou  $u_c^+$  explicitement (ou d'en avoir une caractérisation précise) ? (ii) est-on capable de déterminer le comportement de l'énergie libre au voisinage du point critique ? Cela permettrait par exemple de décrire le comportement de la densité de contact en fonction du paramètre  $u$ .

**Exercice 2.1.** On donne dans cet exercice des bornes sur l'énergie libre, que l'on peut traduire en bornes sur les points critiques.

1. Montrer que  $u_c^+ \geq u_c^0 \geq 0$ .
2. a. Montrer que  $Z_{N,u}^{0/+} \geq e^{u|\Lambda_N|} P_N^0(|\phi_x| \leq a \forall x \in \Lambda_N)$ .  
b. En déduire que  $F^{0/+}(u) \geq \min(u - c_a, 0)$ , où  $e^{c_a} = \int_{[-a,a]} e^{-V(h)} d\mu / \int_{\mathbb{R}} e^{-V(h)} d\mu$ .  
(Indic. Revoir la démonstration du Lemme 1.3.)  
c. Conclure que  $u_c^0 \leq u_c^+ \leq c_a$ .

1. Il s'avère que le seul point de non différentiabilité potentiel est au point critique.



**FIG. 2.1** On a représenté l'énergie libre  $F(u)$  en fonction de  $u$  (dans le cas  $F^0$  ou  $F^+$ ) : il s'agit d'une fonction convexe croissante, positive ou nulle. On a aussi représenté les encadrements  $F(u) \leq \max(u, 0)$  et  $F(u) \geq \min(u - c_a, 0)$ , cf. Exercice 2.1.

### 2.1.3 Existence de l'énergie libre

#### Le cas de la dimension $d = 1$

Comme on l'a annoncé, on montrera l'existence de l'énergie libre en dimension  $d \geq 2$  plus bas, en Section 2.1.3. On donne ici la démonstration du point (i) dans le cas de la dimension  $d = 1$ , pour des interfaces discrètes ; encore une fois, on se concentre sur le cas avec contrainte de mur dur, le cas sans contrainte étant complètement analogue. Grâce à l'interprétation de l'interface comme une marche aléatoire de la Section 1.1.2, on a (pour  $a < 1$  de sorte de  $\delta_x^a = \mathbb{1}_{\{\varphi_x=0\}}$ ),

$$Z_{N,u}^+ = \mathbb{E} \left[ \exp \left( u \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{1}_{\{S_k=0\}} \right) \mathbb{1}_{\Omega_N^+} \mid S_N = 0 \right],$$

où  $(S_k)_{k \geq 1}$  est une marche aléatoire issue de 0, c'est-à-dire  $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$  pour des aléatoires  $(X_i)_{i \geq 1}$  i.i.d.

On pose alors

$$\tilde{Z}_{N,u}^+ := \mathbb{E} \left[ \exp \left( u \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{S_i=0\}} \right) \mathbb{1}_{\Omega_N^+} \mathbb{1}_{\{S_N=0\}} \right] = \mathbb{P}(S_N = 0) e^u Z_{N,u}^+$$

et de même  $\tilde{Z}_{N,u}^0 = \mathbb{P}(S_N = 0) e^u Z_{N,u}^0$ . On obtient  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{P}(S_N = 0) = 0$  grâce au Théorème 1.22, de sorte que l'existence de l'énergie libre découle de l'existence de la limite  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \tilde{Z}_{N,u}^{0/+}$  et on a alors

$$F^{0/+}(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \tilde{Z}_{N,u}^{0/+}.$$

L'avantage de travailler avec la fonction de partition modifiée  $\tilde{Z}_{N,u}^+$  est que l'on a la propriété de sur-multiplicativité suivante : pour  $N, M \geq 1$ , en insérant l'indicatrice  $\mathbb{1}_{\{S_N=0\}}$  dans l'espérance

$$\tilde{Z}_{N+M,u}^+ \geq \mathbb{E} \left[ \exp \left( u \sum_{i=1}^{N+M} \mathbb{1}_{\{S_i=0\}} \right) \mathbb{1}_{\Omega_{N+M}^+} \mathbb{1}_{\{S_N=0\}} \mathbb{1}_{\{S_{N+M}=0\}} \right],$$

qui, grâce à la propriété de Markov, est égal à

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( u \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{S_i=0\}} \right) \mathbb{1}_{\Omega_N^+} \mathbb{1}_{\{S_N=0\}} \right] \mathbb{E} \left[ \exp \left( u \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{S_i=0\}} \right) \mathbb{1}_{\Omega_M^+} \mathbb{1}_{\{S_M=0\}} \right] = \tilde{Z}_{N,u}^+ \tilde{Z}_{M,u}^+.$$

Cela montre que la suite  $(\log \tilde{Z}_{N,u}^{0/+})_{N \geq 1}$  est sur-additive, ce qui permet d'utiliser le lemme de Fekete.

**Lemme 2.3 (Fekete).** *Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels sur-additive, c'est-à-dire telle que pour tous  $n, m \geq 1$  on ait  $u_{n+m} \geq u_n + u_m$ . Alors on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \sup_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}.$$

*En particulier, la limite existe toujours et est finie si le supremum est fini.*

En conclusion, l'énergie libre existe et on a le corollaire suivant du lemme de Fekete.

**Corollaire 2.4.** *En posant  $\tilde{Z}_{N,u}^{0/+} := e^u \mathbb{P}(S_N = 0) Z_{N,u}^{0/+}$ , on a*

$$F^{0/+}(u) = \sup_{N \geq 1} \frac{1}{N} \log \tilde{Z}_{N,u}^{0/+} = \sup_{N \geq 1} \left\{ \frac{1}{N} \log Z_{N,u}^{0/+} + \frac{u}{N} + \frac{1}{N} \log \mathbb{P}(S_N = 0) \right\}.$$

Ce corollaire est assez utile pour avoir un *critère de volume fini* pour la localisation : on a en effet que  $F^{0/+}(u) > 0$  si et seulement s'il existe  $N > 0$  tel que  $\log Z_{N,u}^{0/+} > -u - \log \mathbb{P}(S_N = 0)$  ; si on arrive à trouver un tel  $N$ , le Corollaire 2.4 donne en outre une borne inférieure sur l'énergie libre.

### Le cas du GFF en dimension $d \geq 2$

Rappelons qu'en dimension  $d \geq 2$ , on se concentre sur le cas du GFF. L'idée est de trouver une propriété de type sur-additivité en dimension  $d$ , au moins de manière approchée, pour  $(\log Z_{N,u}^{0/+})_{N \geq 1}$  ; voir (2.10) plus bas. Une difficulté est que l'on ne peut pas contraindre le GFF à valoir 0 sur un domaine car il s'agit d'un événement de probabilité nulle (ce problème se pose aussi en dimension  $d = 1$  pour des surfaces continues).

On peut se restreindre à  $u \geq 0$  car on sait déjà que  $F(u) = 0$  dans ce cas. On procède en plusieurs étapes, que l'on résume en trois lemmes.

**Lemme 2.5 (Changement de condition au bord).** *Pour  $\xi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une condition au bord, on note  $M_N^\xi := \sup_{x \in \partial \Lambda_N} |\xi_x|$ . Alors, il existe une constante  $c_u = 4(|u| + c) > 0$  telle que, si  $M_N^\xi \leq \sqrt{N}$ , on a*

$$-c_u N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi - 1 \leq \log \left( Z_{N,u}^\xi / Z_{N,u}^0 \right) \leq N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi + 1.$$

*Le même encadrement est valable pour  $\log (Z_{N,u}^{\xi,+} / Z_{N,u}^+)$ .*

**Lemme 2.6 (Presque croissance le long des dyadiques).** *Il existe  $c_0 > 0$  et  $N_0 = N_0(c_u)$  tels que pour tous  $N \geq N_0$  la suite  $(\frac{1}{(2^k N)^d} \log Z_{2^k N, u}^{0/+} - c_0(2^k N)^{-1/4})_{k \geq 1}$  est croissante. En particulier, la limite suivante existe*

$$f(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{kd}} \log Z_{2^k, u}^{0/+} = \sup_{k \geq \log_2 N_0} \left\{ \frac{1}{2^{kd}} \log Z_{2^k, u}^{0/+} - c_0 2^{-k/4} \right\}.$$

**Lemme 2.7 (Comblant les trous entre les dyadiques).** *On a l'inégalité suivante :*

$$f(u) \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \log Z_{N, u}^{0/+} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \log Z_{N, u}^{0/+} \leq f(u).$$

Un corollaire de tous ces lemmes, analogue au Corollaire 2.4, est le suivant.

**Corollaire 2.8.** *En dimension  $d \geq 2$ , on a*

$$F^{0/+}(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \log Z_{N, u}^{0/+} = \sup_{N \geq N_0} \left\{ \frac{1}{N^d} \log Z_{N, u}^{0/+} - \frac{c_0}{N^{1/4}} \right\}.$$

### Démonstrations des Lemmes 2.5-2.6-2.7

Cette section est assez technique et peut être sautée en première lecture.

*Démonstration (Lemme 2.5).* On ne traite que le cas sans contrainte, le cas avec contrainte étant totalement analogue. Notons que l'on sait contrôler la différence entre les hamiltoniens avec condition au bord  $\xi$  et condition au bord nulle : en écrivant  $\Lambda = \Lambda_N$ ,

$$H_{\Lambda}^0(\varphi) - H_{\Lambda}^{\xi}(\varphi) = \frac{1}{8d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} [\varphi_x^2 - (\varphi_x^2 - \xi_y)^2] = \frac{1}{4d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \varphi_x \xi_y - \frac{1}{8d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \xi_y^2.$$

En utilisant la définition (2.2) de  $Z_{\Lambda, u}^{\xi}$  on peut écrire

$$Z_{\Lambda, u}^{\xi} = \frac{1}{W_{\Lambda}^{\xi}} \int_{\mathbb{R}^{\Lambda}} e^{-H_{\Lambda}^{\xi}(\varphi) + H_{\Lambda}^0(\varphi) - H_{\Lambda}^0(\varphi)} e^{u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a} d\mu = \frac{W_{\Lambda}^0}{W_{\Lambda}^{\xi}} E_{\Lambda}^0 \left[ e^{-H_{\Lambda}^{\xi}(\varphi) + H_{\Lambda}^0(\varphi) + u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a} \right],$$

avec

$$W_{\Lambda}^{\xi} = \int_{\mathbb{R}^{\Lambda}} e^{-H_{\Lambda}^{\xi}(\varphi) + H_{\Lambda}^0(\varphi) - H_{\Lambda}^0(\varphi)} d\mu = W_{\Lambda}^0 E_{\Lambda}^0 \left[ e^{-H_{\Lambda}^{\xi}(\varphi) + H_{\Lambda}^0(\varphi)} \right].$$

En reprenant l'expression de  $-H_{\Lambda}^{\xi}(\varphi) + H_{\Lambda}^0(\varphi)$  ci-dessus et en remarquant que le dernier terme ne dépend pas de  $\varphi$ , on en déduit que

$$Z_{\Lambda, u}^{\xi} = E_{\Lambda}^0 \left[ e^{\Phi_{\Lambda}^{\xi} + u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a} \right] / E_{\Lambda}^0 \left[ e^{\Phi_{\Lambda}^{\xi}} \right] \quad \text{où} \quad \Phi_{\Lambda}^{\xi} = \frac{1}{4d} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \varphi_x \xi_y. \quad (2.8)$$



*Dénominateur de (2.8).* Notons que  $\Phi_\Lambda^\xi$  est une combinaison linéaire de  $\varphi$ , donc sous  $P_\Lambda^0$ ,  $\Phi_\Lambda^\xi$  est une variable aléatoire gaussienne, *centrée* et de variance

$$\begin{aligned} \text{Var}_\Lambda^0(\Phi_\Lambda^\xi) &= \frac{1}{(4d)^2} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \sum_{\substack{x' \in \Lambda, y' \notin \Lambda \\ x' \sim y'}} G_\Lambda(x, x') \xi_y \xi_{y'} \\ &\leq (M_N^\xi)^2 \frac{1}{(4d)^2} \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \sum_{\substack{x' \in \Lambda, y' \notin \Lambda \\ x' \sim y'}} G_\Lambda(x, x') = (M_N^\xi)^2 \text{Var}_\Lambda^0(\Phi_\Lambda^{\xi \equiv 1}). \end{aligned}$$

On peut en fait calculer explicitement  $\text{Var}_\Lambda^0(\Phi_\Lambda^{\xi \equiv 1})$ , en remarquant que  $W_\Lambda^{\xi \equiv 1} = W_\Lambda^{\xi \equiv h}$  (il s'agit simplement d'un changement de variable  $\varphi \mapsto \varphi + h$ ), de sorte qu'en reprenant l'identité au dessus de (2.8), on obtient pour tout  $h \in \mathbb{R}$

$$1 = \frac{W_\Lambda^{\xi \equiv h}}{W_\Lambda^0} = E_\Lambda^0 \left[ e^{-H_\Lambda^{\xi \equiv h}(\varphi) + H_\Lambda^0(\varphi)} \right] = E_\Lambda^0 \left[ e^{h\Phi_\Lambda^{\xi \equiv 1} - \frac{1}{8d} \sum_{x \in \Lambda, y \notin \Lambda, x \sim y} h^2} \right].$$

Comme on sait que  $\Phi_\Lambda^{\xi \equiv 1}$  est gaussien centré, sa variance est donc donnée par

$$\text{Var}_\Lambda^0(\Phi_\Lambda^{\xi \equiv 1}) = \frac{1}{4d} \sum_{x \in \Lambda, y \notin \Lambda, x \sim y} 1 \leq N^{d-1}.$$

Cela montre que  $\text{Var}_\Lambda^0(\Phi_\Lambda^\xi) \leq N^{d-1} (M_N^\xi)^2$ , donc le dénominateur dans (2.8) vérifie

$$1 \leq E_\Lambda^0 \left[ e^{\Phi_\Lambda^\xi} \right] \leq \exp \left( \frac{1}{2} N^{d-1} (M_N^\xi)^2 \right) \leq \exp \left( \frac{1}{2} N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi \right),$$

en utilisant aussi que  $M_N^\xi \leq \sqrt{N}$ .

*Borne supérieure.* Pour le numérateur dans (2.8), on découpe l'espérance en deux, suivant que  $\Phi_\Lambda^\xi$  soit plus petit ou plus grand que  $b_u N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi$ . Le premier terme est

$$E_\Lambda^0 \left[ e^{\Phi_\Lambda^\xi + u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a} \mathbb{1}_{\{\Phi_\Lambda^\xi \leq b_u N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi\}} \right] \leq e^{b_u N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi} Z_{\Lambda, u}^0.$$

Le deuxième terme est (on rappelle qu'on ne traite que le cas  $u \geq 0$ )

$$\begin{aligned} E_\Lambda^0 \left[ e^{\Phi_\Lambda^\xi + u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a} \mathbb{1}_{\{\Phi_\Lambda^\xi > b_u N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi\}} \right] &\leq e^{u|\Lambda|} E_\Lambda^0 \left[ e^{2\Phi_\Lambda^\xi} \right]^{1/2} P_\Lambda^0 \left( \Phi_\Lambda^\xi > b_u N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi \right)^{1/2} \\ &\leq e^{uN^d} e^{N^{d-1} (M_N^\xi)^2} e^{-\frac{1}{4} b_u^2 N^d}, \end{aligned}$$

où on a majoré  $\delta_x^a$  par 1 et utilisé Cauchy–Schwarz, puis utilisé que  $\Phi_\Lambda^\xi$  est une variable gaussienne centrée de variance  $\leq N^{d-1} (M_N^\xi)^2$ . Maintenant, en prenant  $b_u^2 = 4(u+c)$ , en utilisant que  $M_N^\xi \leq \sqrt{N}$  on en déduit que

$$E_\Lambda^0 \left[ e^{\Phi_\Lambda^\xi + u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a} \mathbb{1}_{\{\Phi_\Lambda^\xi > b_u N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi\}} \right] \leq e^{-cN^d} \leq \frac{1}{2} Z_{N, u}^0, \quad (2.9)$$

où on a aussi appliqué la borne inférieure (2.4) sur  $Z_{N,u}^0$  (en ayant bien choisi la constante  $c$ ). En revenant à (2.8), on en déduit que

$$Z_{\Lambda,u}^\xi \leq \left(\frac{1}{2} + \exp(b_u N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi)\right) Z_{N,u}^0,$$

qui donne la borne supérieure voulue.

*Borne inférieure.* Partant de (2.8) et avec la borne supérieure sur le dénominateur, on a

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda,u}^\xi &\geq e^{-\frac{1}{2}N^{d-\frac{1}{2}}M_N^\xi} E_\Lambda^0 \left[ e^{\Phi_\Lambda^\xi + u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a} \right] \\ &\geq e^{-(\frac{1}{2} + b_u)N^{d-\frac{1}{2}}M_N^\xi} E_\Lambda^0 \left[ e^{u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a} \mathbb{1}_{\{\Phi_\Lambda^\xi > -b_u N^{d-\frac{1}{2}} M_\Lambda^\xi\}} \right]. \end{aligned}$$

Maintenant, on peut écrire

$$E_\Lambda^0 \left[ e^{u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a} \mathbb{1}_{\{\Phi_\Lambda^\xi > -b_u N^{d-\frac{1}{2}} M_\Lambda^\xi\}} \right] = Z_{N,u}^0 - E_\Lambda^0 \left[ e^{u \sum_{x \in \Lambda} \delta_x^a} \mathbb{1}_{\{\Phi_\Lambda^\xi < -b_u N^{d-\frac{1}{2}} M_\Lambda^\xi\}} \right] \leq \frac{1}{2} Z_{N,u}^0,$$

où la dernière inégalité est due à (2.9). On en conclut

$$Z_{\Lambda,u}^\xi \geq \frac{1}{2} \exp\left(- (1 + b_u) N^{d-\frac{1}{2}} M_N^\xi\right) Z_{N,u}^0,$$

qui donne la borne inférieure voulue.  $\square$

*Démonstration (Lemme 2.6).* Commençons par montrer qu'il existe  $N_0$  tel que

$$\frac{1}{(2N)^d} \log Z_{2N,u}^0 \geq \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0 - N^{-\frac{1}{4}} \quad \text{pour } N \geq N_0. \quad (2.10)$$

L'idée est de découper le cube  $\{1, \dots, 2N-1\}^d$  en  $2^d$  blocs  $(\Lambda_{N,v})_{v \in \{0,1\}^d}$  de taille  $N$ , c'est-à-dire  $\Lambda_{N,v} = \Lambda_N + Nv$ . Notons que les blocs  $\Lambda_{N,v}$  sont bien séparés par une bordure : on note  $\Gamma := \Lambda_{2N} \setminus (\bigcup_{v \in \{0,1\}^d} \Lambda_{N,v})$ . En imposant que le GFF ne soit pas trop grand sur  $\Gamma$  et en conditionnant par  $\mathcal{F}_\Gamma$ , on obtient l'inégalité suivante, due à l'application de la propriété de Markov spatiale :

$$\begin{aligned} Z_{2N,u}^0 &\geq E_{2N}^0 \left[ \prod_{v \in \{0,1\}^d} Z_{\Lambda_{N,v},u}^\phi \mathbb{1}_{\{|\phi_x| \leq (\log N)^3 \ \forall x \in \Gamma\}} \right] \\ &\geq \left( Z_{N,u}^0 e^{-c_u N^{d-\frac{1}{2}} (\log N)^3} \right)^{2^d} \mathbb{P}(|\phi_x| \leq (\log N)^3 \ \forall x \in \Gamma), \end{aligned}$$

où on a utilisé le Lemme 2.5 de changement de condition au bord. Maintenant, on a

$$\mathbb{P}(\exists x \in \Gamma, |\phi_x| \leq (\log N)^3) \leq |\Gamma| e^{-\frac{1}{2}(\log N)^3 / \sigma_N^2},$$

où  $\sigma_N^2 = \max_{x \in \Lambda_{2N}} \text{Var}_{2N}^0(\phi_x)$  vérifie  $\sigma_N^2 \leq C$  en dimension  $d \geq 3$  et  $\sigma_N^2 \leq C \log N$  en dimension  $d = 2$ . On obtient donc

$$\mathbb{P}(|\phi_x| \leq (\log N)^3 \ \forall x \in \Gamma) \geq 1 - (2N)^d e^{-c(\log N)^2} \geq \frac{1}{2}$$

pour  $N$  assez grand. On a donc montré que

$$\frac{1}{2^d} \frac{1}{N^d} \log Z_{2N,u}^0 \geq \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0 - c_u N^{-\frac{1}{2}} (\log N)^3 - \log 2 \geq \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0 - N^{-\frac{1}{4}}$$

pour  $N$  grand (à quel point  $N$  doit être grand dépend de  $c_u$ ). Il s'agit de l'inégalité (2.10).

Posons maintenant, pour  $N \geq N_0$ ,  $U_N = \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0 - c_0 N^{1/4}$  avec  $c_0 = (1 - 2^{-1/4})^{-1}$  (de sorte que  $1 + c_0 2^{-1/4} = c_0$ ). En utilisant (2.10), on a pour  $N \geq N_0$ ,

$$U_{2N} \geq \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0 - N^{-\frac{1}{4}} - c_0 (2N)^{-1/4} = U_N.$$

Ainsi, la suite  $(U_{2^k N})_{k \geq 0}$  est croissante, ce qui montre que  $\lim_{k \rightarrow \infty} U_{2^k N}$  existe et est égale à  $f(u)$  car  $\lim_{k \rightarrow \infty} (2^k N)^{-1/4} = 0$ .  $\square$

*Démonstration (Lemme 2.7).* Commençons par la *borne inférieure*. On va appliquer la même idée que précédemment, en écrivant

$$N = q_N 2^{k_N} + r_N \quad k_N := \frac{1}{2} \lceil \log_2 N \rceil, \quad r_N \leq 2^{k_N}.$$

Noter que  $r_N \leq \sqrt{N}$  et  $q_N \sim \sqrt{N}$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

On découpe  $\Lambda_N$  en  $q_N$  boîtes de taille  $2^{k_N}$ , que l'on note  $\Lambda_{N,v} = \Lambda_{2^{k_N}} + 2^{k_N} v$  pour  $v \in \{0, \dots, q_N - 1\}^d$ . En conditionnant par  $\mathcal{F}_\Gamma$  où  $\Gamma = \Lambda_N \setminus (\bigcup_v \Lambda_{N,v})$  et en utilisant la propriété de Markov spatiale (et le fait que  $u\delta_x \geq 0$  sur  $\Gamma$ ), on obtient

$$\begin{aligned} Z_{N,u}^0 &\geq \mathbb{E}_N^0 \left[ \prod_{v \in \{1, \dots, q_N\}^d} Z_{\Lambda_{N,v},u}^\phi \mathbb{1}_{\{|\phi_x| \leq (\log N)^3 \forall x \in \Gamma\}} \right] \\ &\geq \left( Z_{2^{k_N}}^0 e^{-c 2^{k_N}(d-\frac{1}{2})(\log N)^3} \right)^{q_N^d} \mathbb{P}(|\phi_x| \leq (\log N)^3 \forall x \in \Gamma) \end{aligned}$$

en utilisant encore le Lemme 2.5 de changement de condition au bord. Maintenant, exactement comme plus haut, la dernière probabilité est supérieure à  $\frac{1}{2}$ . Cela montre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0 &\geq \frac{q_N^d}{N^d} \log Z_{2^{k_N},u}^0 - \frac{c}{N^d} 2^{k_N(d-\frac{1}{2})} (\log N)^3 - \log 2 \\ &\geq \frac{q_N^d}{(q_N + 1)^d} \frac{1}{2^{k_N d}} \log Z_{2^{k_N},u}^0 - c' 2^{-\frac{1}{2} k_N} (\log N)^3, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que  $2^{k_N} \leq N \leq (1 + q_N) 2^{k_N}$ . En prenant la liminf quand  $N \rightarrow \infty$  et en utilisant le Lemme 2.6 avec le fait que  $k_N, q_N \rightarrow \infty$ , on en déduit la borne inférieure.

*Borne supérieure.* On introduit  $\hat{k}_N = 2 \lceil \log_2 N \rceil$ , de sorte que l'on peut écrire

$$2^{\hat{k}_N} = \hat{q}_N N + \hat{r}_N, \quad \hat{r}_N < N.$$

Cette fois, on découpe  $\Lambda_{2^{\hat{k}_N}}$  en  $\hat{q}_N$  boîtes de taille  $N$ , notées  $\Lambda_{N,v} = \Lambda_N + Nv$ . Avec les mêmes inégalités qu'au dessus (en remplaçant  $N$  par  $2^{\hat{k}_N}$  et  $2^{k_N}$  par  $N$ ), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{\hat{k}_N d}} \log Z_{2^{\hat{k}_N},u}^0 &\geq \frac{\hat{q}_N^d}{2^{\hat{k}_N d}} \log Z_{N,u}^0 - \frac{c}{2^{\hat{k}_N d}} N^{d-\frac{1}{2}} (\log 2^{\hat{k}_N})^3 - \log 2 \\ &\geq \frac{\hat{q}_N^d}{(\hat{q}_N + 1)^d} \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0 - c' N^{-\frac{1}{2}} (\log N)^3, \end{aligned}$$

où on a utilisé que En prenant la limsup quand  $N \rightarrow \infty$  et en utilisant le Lemme 2.6 avec le fait que  $\hat{k}_N, \hat{q}_N \rightarrow \infty$ , on en déduit la borne supérieure.  $\square$

*Démonstration (Corollaire 2.8).* L'existence de la limite est donnée par les Lemmes 2.6 et 2.7. Le Lemme 2.6 nous assure en outre que pour tout  $N \geq N_0$ ,

$$\begin{aligned} f(u) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{kd} N^d} \log Z_{2^k N, u}^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^{kd} N^d} \log Z_{2^k N, u}^0 - c_0 (2^k N)^{-1/4} \right) \\ &\geq \frac{1}{N^d} \log Z_{N, u}^0 - c_0 N^{-1/4}, \end{aligned}$$

par croissance en  $k$ . Cela donne la borne  $f(u) \geq \sup_{N \geq N_0} \left\{ \frac{1}{N^d} \log Z_{N, u}^0 - c_0 N^{-1/4} \right\}$ , l'autre borne étant évidente.  $\square$

## 2.2 Énergie libre et transition de phase dimension $d = 1$

En dimension  $d = 1$  (pour une interface discrète), il s'avère que l'on est capable de donner une formule implicite pour l'énergie libre, à la fois dans le modèle avec et sans contrainte. On en déduira le résultat suivant, qui donne les points critiques et le comportement critique de l'énergie libre.

**Théorème 2.9.** *En dimension  $d = 1$ , on a  $u_c^0 = 0$  et  $u_c^+ > 0$ . De plus, il existe des constantes  $c_0, c_+ > 0$  telles que*

$$\begin{aligned} F^0(u) &\sim c_0 u^2 && \text{quand } u \downarrow 0, \\ F^+(u) &\sim c_+ (u - u_c^+)^2 && \text{quand } u \downarrow u_c^+. \end{aligned}$$

### 2.2.1 Calcul de l'énergie libre (formule implicite)

On va donner ici une expression implicite pour l'énergie libre. Rappelons les notations  $p_n = P(S_N = 0)$  et  $p_n^+ := P(S_n = 0, S_k \geq 0 \forall k \leq n)$  et introduisons les transformées de Laplace suivantes : pour  $\lambda > 0$

$$U^0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} p_n, \quad U^+(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} p_n^+. \quad (2.11)$$

Notons que les fonctions  $\lambda \mapsto U^{0/+}(\lambda)$  sont strictement décroissantes et convexes. On va montrer le résultat suivant :

**Proposition 2.10.** *L'énergie libre  $F^0(u)$  est la solution en  $\lambda$  de l'équation*

$$\frac{U^0(\lambda) - 1}{U^0(\lambda)} = e^{-u} \iff U^0(\lambda) = \frac{1}{1 - e^{-u}}$$

*si une solution existe et  $F^0(u) = 0$  sinon.*

*Le même résultat est valable pour  $F^+(u)$  en remplaçant  $U^0$  par  $U^+$ .*

On démontre cette proposition dans le cas sans contrainte pour commencer et on montre ensuite comment l'adapter dans le cas avec contrainte.

### Cas sans contrainte

*Réécriture du problème.* On rappelle la notation  $\tilde{Z}_{N,u}^0 = P(S_N = 0)e^u Z_{N,u}^0$ , c'est-à-dire

$$\tilde{Z}_{N,u}^0 = E \left[ \exp \left( u \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{S_i=0\}} \right) \mathbb{1}_{\{S_N=0\}} \right],$$

qui vérifie  $F^0(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,u}^0$ . On introduit ce qui est appelé la fonction de partition *grand canonique* : pour  $u \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$ , on pose

$$\tilde{Z}_{u,\lambda}^0 := \sum_{N=1}^{\infty} e^{-\lambda N} \tilde{Z}_{N,u}^0 \in [0, \infty]. \quad (2.12)$$

On souligne que  $\tilde{Z}_{u,\lambda}^0$  peut être infini. On remarque d'ailleurs que par définition de l'énergie libre  $F^0(u)$ , on a que  $e^{F^0(u)} = \lim_{N \rightarrow \infty} (\tilde{Z}_{N,u}^0)^{1/N}$  est le rayon de convergence de la série, donc on obtient facilement que

$$\tilde{Z}_{u,\lambda}^0 < +\infty \text{ pour } \lambda < F^0(u), \quad \tilde{Z}_{u,\lambda}^0 = +\infty \text{ pour } \lambda > F^0(u).$$

Autrement dit,

$$F^0(u) = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}, \tilde{Z}_{u,\lambda}^0 < +\infty \},$$

en gardant à l'esprit que  $\tilde{Z}_{u,\lambda}^0 = +\infty$  pour tout  $\lambda < 0$  (car  $Z_{N,u}^0 \geq cN^{-3/2}$  comme on l'a vu plus haut). On a donc ramené le calcul de l'énergie libre au fait de déterminer si la série (2.12) est convergente ou non.

*Remarque 2.11.* On peut associer la fonction de partition  $\tilde{Z}_{N,u}^0$  à une mesure de Gibbs : pour une taille de système  $N \in \mathbb{N}$  et  $u \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{d\tilde{P}_{N,u}^0}{dP} = \exp \left( u \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{S_i=0\}} \right) \mathbb{1}_{\{S_N=0\}}, \quad (2.13)$$

où la mesure de référence  $dP$  est la loi d'une marche aléatoire  $(S_n)_{n \geq 0}$  issue de 0. De la même manière, on peut associer la fonction de partition grand canonique  $\tilde{Z}_u^0(\lambda)$  à une mesure de Gibbs, où cette fois la taille du système n'est pas fixée

$$\frac{d\tilde{P}_{u,\lambda}^0}{d(P \otimes m)} = e^{-\lambda N} \exp \left( u \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{S_i=0\}} \right) \mathbb{1}_{\{S_N=0\}}$$

où  $m$  est la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}^*$  ; le caractère fini de  $\tilde{Z}_{u,\lambda}^0$  est ici important. Cette mesure correspond à considérer la mesure de Gibbs  $\tilde{P}_{N,u}^0$  mais où la taille du système  $N$  est aléatoire, de loi  $\tilde{P}_{u,\lambda}^0(N = n) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(n-1)}$ , c'est-à-dire de loi géométrique de paramètre  $e^{-\lambda}$ .

*Calcul de  $\tilde{Z}_{N,\lambda}^0$ .* Il s'avère que l'on est capable de calculer explicitement la fonction de partition grand canonique (2.12). On introduit la suite de temps d'arrêts :  $\tau_0 = 0$  et de manière itérative, pour  $k \geq 1$

$$\tau_k := \min \{ n > \tau_{k-1}, S_n = 0 \}, \quad (2.14)$$

qui représentent les temps de retours successifs de la marche aléatoire en 0. On peut alors décomposer la fonction de partition  $\tilde{Z}_{N,u}^0$  suivant le nombre de retours en 0, en notant que  $\{S_N = 0\} = \bigcup_{k=1}^N \{\tau_k = N\}$ . On a

$$\tilde{Z}_{N,u}^0 = \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[ \exp \left( u \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{S_i=0\}} \right) \mathbb{1}_{\{\tau_k=N\}} \right] = \sum_{k=1}^N e^{uk} \mathbb{P}(\tau_k = N),$$

car  $\tau_k = N$  si et seulement si  $S_N = 0$  et  $\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{S_i=0\}} = k$ . En formant la fonction de partition grand canonique, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{u,\lambda}^0 &:= \sum_{N=1}^{\infty} e^{-\lambda N} \tilde{Z}_{N,u}^0 = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=1}^N e^{-\lambda N} e^{uk} \mathbb{P}(\tau_k = N) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{uk} \sum_{N=k}^{\infty} e^{-\lambda N} \mathbb{P}(\tau_k = N) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{uk} \mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_k}]. \end{aligned}$$

Comme les  $(\tau_k - \tau_{k-1})_{k \geq 1}$  sont i.i.d. (par la propriété de Markov forte), on en déduit que

$$\tilde{Z}_{u,\lambda}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left( e^u \mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}] \right)^k = \begin{cases} \frac{e^u \mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}]}{1 - e^u \mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}]} < +\infty & \text{si } e^u \mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}] < 1, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, comme la fonction  $\lambda \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}]$  est décroissante et continue (avec pour valeur  $\mathbb{P}(\tau_1 < +\infty)$  en  $\lambda = 0$ ), on a la caractérisation suivante pour l'énergie libre :

$$F^0(u) \text{ est la solution en } \lambda \text{ de } \mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}] = e^{-u} \quad (2.15)$$

si une solution existe et  $F^0(u) = 0$  sinon.

*Conclusion de la démonstration.* Il reste simplement à démontrer le lien suivant entre la transformée de Laplace  $\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}]$  de  $\tau_1$  et  $U^0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} p_n$ . Le lemme suivant, combiné à (2.15), permet directement de conclure la démonstration de la Proposition 2.10

**Lemme 2.12.** Soit  $(S_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov sur  $E$  dénombrable issue de 0 et soit  $\tau_1 = \min\{n \geq 1, S_n = 0\}$ . Pour tout  $\lambda \geq 0$ , en posant  $U(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \mathbb{P}(S_n = 0)$ , on a

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}] = \frac{U(\lambda) - 1}{U(\lambda)}.$$

*Démonstration.* On part de la décomposition suivante de la probabilité  $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$  :

$$\text{pour } n \geq 1, \quad p_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\tau_1 = k) p_{n-k}.$$

En utilisant que  $p_n = 1$  pour  $n = 0$ , on obtient

$$U(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\tau_1 = k) p_{n-k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k} \mathbb{P}(\tau_1 = k) \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda(n-k)} p_{n-k},$$

ce qui donne  $U(\lambda) = 1 + \mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}] U(\lambda)$ , qui est l'identité voulue.  $\square$

*Remarque 2.13.* Notons que l'on peut prendre  $\lambda = 0$  dans le Lemme 2.12 (ou on peut prendre  $\lambda \downarrow 0$ ), cela montre que

$$P(\tau_1 < +\infty) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n = 0)}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n = 0)}.$$

Noter que l'on retrouve le fait que  $P(\tau_1 < +\infty) = 1$ , *i.e.* la chaîne de Markov est récurrente, si et seulement si  $\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n = 0) = +\infty$ , *i.e.*  $G(0,0) = +\infty$ . Dans le cas présent, comme  $P(S_n = 0) \sim c_1 n^{-1/2}$ , on a  $\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n = 0) = +\infty$ , donc  $P(\tau_1 < +\infty)$ .

### Cas avec contrainte

Le cas avec contrainte est complètement analogue : en considérant la fonction de partition grand canonique

$$\tilde{Z}_{u,\lambda}^+ = \sum_{N=1}^{\infty} e^{-\lambda N} \tilde{Z}_{N,u}^+,$$

on obtient de nouveau que  $F^+(u) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}, \tilde{Z}_{u,\lambda}^+ < +\infty\}$ . (La Remarque 2.11 reste valable dans le cas avec contrainte.)

Pour le calcul de  $\tilde{Z}_{u,\lambda}^+$ , on introduit les temps d'arrêts  $(\tau_k^+)_{k \geq 0}$  en posant  $\tau_0^+ = 0$  et de manière itérative

$$\tau_k^+ = \min\{n > \tau_{k-1}^+, S_n = 0 \text{ and } S_j > 0 \text{ for all } \tau_{k-1}^+ < j < n\}, \quad (2.16)$$

avec par convention  $\min \emptyset = +\infty$  (en particulier  $\tau_k^+ = +\infty$  si  $\tau_{k-1}^+ = +\infty$ ). Avec cette définition de  $\tau_k^+$ , on a

$$P(\tau_1^+ = j) = P(S_j = 0, S_i > 0 \forall 1 \leq i \leq j-1)$$

et on a aussi que  $\tau_k^+ = N$  si et seulement si  $S_N = 0, S_i \geq 0 \forall i \leq N$  et  $\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{S_i=0\}} = k$ . On en déduit que l'on peut décomposer  $\Omega_N^+ \cap \{S_N = 0\} = \bigcup_{k=1}^N \{\tau_k^+ = N\}$ , donc, de manière analogue à ce qu'on a fait pour  $\tilde{Z}_{N,u}^0$ , on obtient

$$\tilde{Z}_{N,u}^+ = \sum_{k=1}^N e^{uk} P(\tau_k^+ = N).$$

En reprenant le calcul de  $\tilde{Z}_{u,\lambda}^+$ , on obtient donc

$$\tilde{Z}_{u,\lambda}^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \left( e^u E[e^{-\lambda \tau_1^+}] \right)^k = \begin{cases} \frac{e^u E[e^{-\lambda \tau_1^+}]}{1 - e^u E[e^{-\lambda \tau_1^+}]} < +\infty & \text{si } e^u E[e^{-\lambda \tau_1^+}] < 1, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que l'on a de nouveau la caractérisation suivante pour l'énergie libre :

$$F^+(u) \text{ est la solution en } \lambda \text{ de } E[e^{-\lambda \tau_1^+}] = e^{-u} \quad (2.17)$$

si une solution existe et  $F^+(u) = 0$  sinon.

Avec la même démonstration que pour le Lemme 2.12, on obtient la relation suivante entre la transformée de Laplace  $E[e^{-\lambda \tau_1^+}]$  et  $U^+(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} p_n^+$  où on rappelle que

$p_n^+ = P(S_n = 0, S_i \geq 0 \forall i \leq n)$  : pour tout  $\lambda \geq 0$ , on a

$$E[e^{-\lambda \tau_1^+}] = \frac{U^+(\lambda) - 1}{U^+(\lambda)}.$$

Cela conclut la démonstration de la Proposition 2.10.

*Remarque 2.14.* Soulignons ici que, de la même manière que dans la Remarque 2.13, en prenant  $\lambda = 0$  on obtient

$$P(\tau_1^+ < +\infty) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n^+}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n^+}.$$

En particulier, comme on a  $p_n^+ \sim c_2 n^{-3/2}$  grâce au Théorème 1.22, on obtient que  $\Sigma_+ := \sum_{n=1}^{\infty} p_n^+ < +\infty$ , donc  $P(\tau_1^+ < +\infty) = \Sigma_+ / (1 + \Sigma_+) < 1$ .

**Exercice 2.2.** On considère  $(S_n)_{n \geq 0}$  la marche aléatoire d'incréments  $(X_i)_{i \geq 1}$  i.i.d. de loi donnée par  $P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{4}$  et  $P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$ ; autrement dit,  $S_n = \tilde{S}_{2n}$ , où  $(\tilde{S}_k)_{k \geq 0}$  est la marche aléatoire simple.

1. On note  $T_- := \min\{k \geq 0, S_k = -1\}$  et  $G(x) = E[x^{T_-}]$  pour  $x \in [0, 1]$ . Montrer que  $G(x) = \frac{1}{4}x(1 + 2G(x) + G(x)^2)$ . En déduire  $G(x)$ .
2. Montrer que  $E[e^{-\lambda \tau_1}] = \frac{1}{2}e^{-\lambda}(1 + G(e^{-\lambda}))$ . En déduire  $E[e^{-\lambda \tau_1}]$  puis  $F^0(u)$ .
3. Montrer que  $E[e^{-\lambda \tau_1^+}] = \frac{1}{2}e^{-\lambda}(1 + \frac{1}{2}G(e^{-\lambda}))$ . En déduire  $E[e^{-\lambda \tau_1^+}]$  puis  $F^+(u)$ .

## 2.2.2 Points critiques et comportement critiques

### Détermination des points critiques

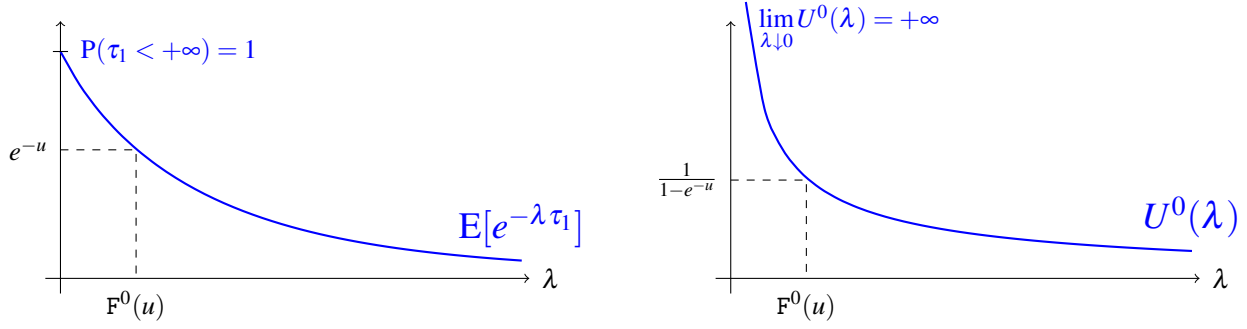
Commençons par déterminer les points critiques, grâce à la Proposition 2.10, ou les caractérisations (2.15)-(2.17).

*Note.* Les fonctions  $\lambda \mapsto E[e^{-\lambda \tau_1}], E[e^{-\lambda \tau_1^+}]$ , resp.  $\lambda \mapsto U^0(\lambda), U^+(\lambda)$  sont strictement décroissantes et convexes sur  $\mathbb{R}_+$ , de limite 0, resp. 1, quand  $\lambda \rightarrow \infty$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \downarrow 0} E[e^{-\lambda \tau_1}] &= P(\tau_1 < +\infty) = 1, & \lim_{\lambda \downarrow 0} U^0(\lambda) &= +\infty, \\ \lim_{\lambda \downarrow 0} E[e^{-\lambda \tau_1^+}] &= P(\tau_1^+ < +\infty) < 1, & \lim_{\lambda \downarrow 0} U^+(\lambda) &= 1 + \Sigma_+ < +\infty. \end{aligned}$$

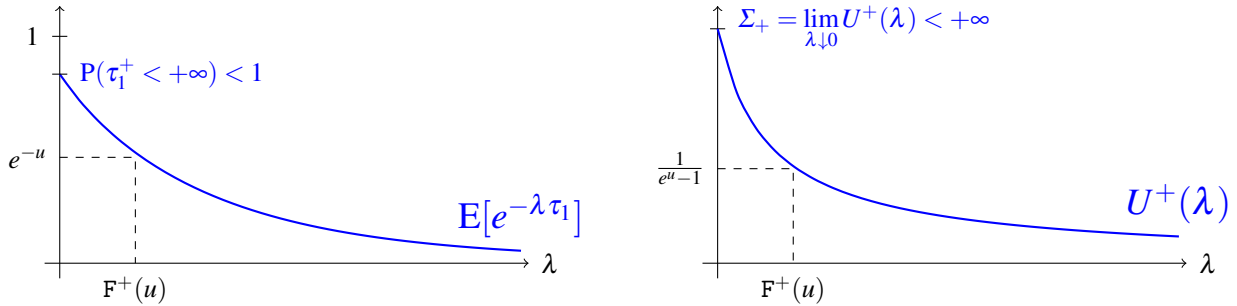
**Cas sans contrainte.** Représentons graphiquement la caractérisation (2.15) de  $F^0$  (à gauche) et la caractérisation de la Proposition 2.10 (à droite), en utilisant les propriétés des fonctions  $\lambda \mapsto E[e^{-\lambda \tau_1}], U^0(\lambda)$  rappelées plus haut :





Notons que, par les propriétés de la fonction  $\lambda \mapsto E[e^{-\lambda \tau_1}]$  rappelées plus haut, l'équation  $E[e^{-\lambda \tau_1}] = e^{-u}$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$  pour tout  $u$  tel que  $e^{-u} \in ]0, 1[$ , c'est-à-dire pour tout  $u > 0$ . En utilisant la caractérisation (2.15), cela montre que  $F^0(u) > 0$  si et seulement si  $u > 0$ , autrement dit  $u_c^0 = 0$ . On aurait pu utiliser la Proposition 2.10, en observant que grâce aux propriétés de la fonction  $\lambda \mapsto U^0(\lambda)$  données plus haut, l'équation  $U^0(\lambda) = \frac{1}{1-e^{-u}}$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$  pour tout  $u$  tel que  $\frac{1}{1-e^{-u}} \in ]1, \infty[$ , c'est-à-dire pour tout  $u > 0$ .

**Cas avec contrainte.** Représentons graphiquement la caractérisation (2.17) de  $F^+$  (à gauche) et la caractérisation de la Proposition 2.10 (à droite), en utilisant les propriétés des fonctions  $\lambda \mapsto E[e^{-\lambda \tau_1^+}], U^+(\lambda)$  rappelées plus haut :



Par les propriétés de la fonction  $\lambda \mapsto E[e^{-\lambda \tau_1^+}]$  données plus haut, l'équation  $E[e^{-\lambda \tau_1^+}] = e^{-u}$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$  pour tout  $u$  tel que  $e^{-u} \in ]0, P(\tau_1^+ < +\infty)[$ , c'est-à-dire pour tout  $u > -\log P(\tau_1^+ < +\infty)$ . En utilisant la caractérisation (2.17), cela montre que  $F^+(u) > 0$  si et seulement si  $u > -\log P(\tau_1^+ < +\infty)$ , autrement dit

$$u_c^+ = -\log P(\tau_1^+ < +\infty) > 0.$$

On aurait aussi pu utiliser la Proposition 2.10, en observant que l'équation  $U^+(\lambda) = \frac{1}{1-e^{-u}}$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$  pour tout  $u$  tel que  $\frac{1}{1-e^{-u}} \in ]1, 1 + \Sigma_+[$ , c'est-à-dire pour tout  $u > \log(\frac{1+\Sigma_+}{\Sigma_+})$ . On a ainsi  $u_c^+ = \log(\frac{1+\Sigma_+}{\Sigma_+}) > 0$  (voir la Remarque 2.14 pour retrouver la valeur donnée plus haut).

### Comportement de l'énergie libre près du point critique

Maintenant que l'on a l'expression explicite des points critiques, on peut donner le comportement de l'énergie libre au voisinage de  $u_c^0, u_c^+$ , en utilisant la Proposition 2.10. L'idée est de partir de l'observation que pour tout  $u > u_c^0$ , resp.  $u > u_c^+$ , on a

$$U^0(F^0(u)) = \frac{1}{1 - e^{-u}}, \quad U^+(F^+(u)) = \frac{1}{1 - e^{-u}}. \quad (2.18)$$

On sait que les fonctions  $u \mapsto F^{0/+}(u)$  sont continues, donc  $\lim_{u \downarrow u_c} F^{0/+}(u) = 0$ . On va donc étudier le comportement de  $U^{0/+}(\lambda)$  quand  $\lambda \downarrow 0$ , à l'aide du Théorème 1.22 qui donne le comportement de  $p_n, p_n^+$ . On regroupe les résultats dans le lemme suivant.

**Lemme 2.15.** *Quand  $\lambda \downarrow 0$ , on a les comportements suivants :*

$$U^0(\lambda) \sim c_1 \sqrt{\pi} \lambda^{-1/2}, \quad U^+(0) - U^+(\lambda) \sim 2c_2 \sqrt{\pi} \lambda^{1/2}.$$

où  $c_1, c_2$  sont les constantes apparaissant dans le Théorème 1.22.

*Remarque 2.16.* Notons en passant que la formule (2.18) montre que les énergies libres  $F^0, F^+$  sont analytiques sur  $]0, +\infty[$ ,  $]u_c^+, +\infty[$  respectivement. En effet, les fonctions  $\lambda \mapsto U^0(\lambda), U^+(\lambda)$  sont analytiques et bijectives de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, +\infty[$ ,  $]0, \frac{1}{1-e^{-u_c}}[$  respectivement. Le théorème des fonctions implicites holomorphes montre alors que les fonctions inverses de  $U^0, U^+$  sont analytiques, ce qui montre la propriété annoncée (en composant par la fonction analytique  $u \mapsto \frac{1}{e^u - 1}$ ).

Grâce au Lemme 2.15, en utilisant la relation (2.18), on obtient donc que :

- Dans le cas sans contrainte, quand  $u \downarrow u_c^0 = 0$

$$c_1 \sqrt{\pi} F^0(u)^{-1/2} \sim U^0(F^0(u)) = \frac{1}{1 - e^{-u}} \sim \frac{1}{u},$$

ce qui donne le Théorème 2.9, avec la constante  $c_0 = (\pi c_1^2)^{-1} = 2\sigma^2$ .

- Dans le cas avec contrainte, en notant que  $\frac{1}{1-e^{-u_c^+}} = U^+(0) = 1 + \Sigma_+$ , on a quand  $u \downarrow u_c^+$

$$2c_2 \sqrt{\pi} F^+(u)^{1/2} \sim U^+(0) - U^+(F^+(u)) = \frac{1}{1 - e^{-u_c^+}} - \frac{1}{1 - e^{-u}} \sim \frac{e^{-u_c^+}}{(1 - e^{-u_c^+})^2} (u - u_c^+)$$

ce qui donne le Théorème 2.9, avec la constante  $c_+ = \frac{1}{4\pi c_2^2} \frac{e^{-2u_c^+}}{(1 - e^{-u_c^+})^4} = \frac{\Sigma_+^2(1 + \Sigma_+)^2}{4\pi c_2^2}$ .

*Démonstration (Lemme 2.15).* Commençons par le cas sans contrainte. D'après le Théorème 1.22, on a  $p_n \sim c_1 n^{-1/2}$  avec  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ . On montre facilement que la contribution des  $n$  petits est négligeable, ce qui permet d'obtenir

$$U^0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} p_n \sim c_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} e^{-\lambda n}.$$

Maintenant, on fait apparaître une somme de Riemann :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} e^{-\lambda n} = \lambda^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda (\lambda n)^{-1/2} e^{-\lambda n} \sim \lambda^{-1/2} \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx \quad \text{quand } \lambda \downarrow 0.$$

Comme  $\int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , on en conclut que  $U^0(\lambda) \sim c_1 \sqrt{\pi} \lambda^{-1/2}$ .

Pour le cas avec contrainte, on écrit, de manière analogue au cas précédent (la contribution des  $n$  petits est ici aussi négligeable) : comme  $U^+(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^+$ , on a

$$U^+(0) - U^+(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda n}) p_n^+ \sim c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda n}}{n^{3/2}}.$$

On écrit alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda n}}{n^{3/2}} = \lambda^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \frac{1 - e^{-\lambda n}}{(\lambda n)^{3/2}} \sim \lambda^{1/2} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x^{3/2}} dx \quad \text{quand } \lambda \downarrow 0,$$

en utilisant de nouveau une somme de Riemann (noter l'intégrabilité en 0 et en  $+\infty$ ). Comme  $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x^{3/2}} dx = 2\sqrt{\pi}$ , on en déduit que  $U^+(0) - U^+(\lambda) \sim 2c_2\sqrt{\pi}\lambda^{1/2}$ .  $\square$

## 2.3 Énergie libre et transition de phase en dimension $d = 2$

Contrairement au cas de la dimension  $d = 1$  pour des interfaces discrètes, il n'existe pas de formule pour l'énergie libre dans le cas du GFF. On peut quand même obtenir des informations sur la transition de phase par des méthodes plus souples, au moins dans le cas sans contrainte.

**Théorème 2.17.** *En dimension  $d = 2$ , on a  $u_c^0 = 0$  et  $u_c^+ > 0$ .*

*Pour le modèle sans contrainte, il existe une constante  $c_0$  telle que*

$$F^0(u) \sim c_0 \frac{u}{\sqrt{\log 1/u}} \quad \text{quand } u \downarrow 0.$$

*En revanche, pour ce qui est du modèle avec contrainte, le comportement critique de  $F^+$  au voisinage de  $u_c^+$  est inconnu.*

Soulignons que le comportement critique précis de l'énergie libre  $F^0$  est annoncé dans [CM13, Fact 2.4], en citant une “variante de la preuve” de [BV01, Thm. 2.4] (mais sans donner la constante) ; je ne crois pas qu'une preuve écrite existe quelque part... On va démontrer ici, en utilisant une méthode employée dans [GL17], un résultat un peu moins fort, qui donne un encadrement : quand  $u \downarrow 0$

$$(1 + o(1)) \frac{a}{2} \frac{u}{\sqrt{\log 1/u}} \leq F^0(u) \leq (1 + o(1)) a\sqrt{2} \frac{u}{\sqrt{\log 1/u}}. \quad (2.19)$$

La borne inférieure montre notamment que  $F^0(u) > 0$  pour tout  $u > 0$  (arbitrairement petit), ce qui montre donc que  $u_c^0 > 0$ .

Le cas avec contraintes est nettement plus difficile : le fait que  $u_c^+ > 0$  est démontré dans [CV00] (l'idée de la démonstration est donnée dans [Gia01, Vel06]) et il s'agit d'un résultat pas évident. Le comportement critique de  $F^+$  au voisinage de  $u_c^+$  est complètement ouvert ; il n'y a à ma connaissance aucun résultat dans cette direction, même partiel.

*Démonstration (de (2.19)).* Commençons par la borne inférieure. On peut utiliser la convexité de  $u \mapsto \log Z_{N,u}^0$  pour obtenir l'inégalité suivante :

$$\log Z_{N,u}^0 \geq u \times \frac{\partial}{\partial u} \log Z_{N,u}^0 \Big|_{u=0} = u \mathbb{E}_N^0 \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right],$$

en réutilisant le calcul (2.5). En utilisant le Corollaire 2.8, appelé *critère de volume fini*, on obtient que pour tout  $N \geq N_0$  (noter que  $N_0$  est minoré par une constante donnée pour  $u \in [0, \frac{1}{2}]$ ), on a

$$F^0(u) \geq \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0 - N^{-1/4} \geq u \frac{1}{N^d} \mathbb{E}_N^0 \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right] - c_0 N^{-1/4}. \quad (2.20)$$

On va maintenant appliquer cette inégalité avec un  $N_u$  bien choisi.

Avant cela, estimons la borne inférieure (dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , car on va choisir  $N_u$  tel que  $\lim_{u \downarrow 0} N_u = +\infty$ ). On a  $\mathbb{E}_N^0[\delta_x^a] = \mathbb{P}_N^0(\varphi_x \in [-a, a])$  et la variable  $\varphi_x$  suit sous  $\mathbb{P}_N^0$  une loi gaussienne centrée de variance  $\sigma_N^2(x) := G_{\Lambda_N}(x, x)$ . On sait notamment que  $\sigma_N(0) \sim \frac{2}{\pi} \log N$ , voir la Remarque 1.13, mais on peut montrer en général que  $\sigma_N^2(x) \sim \frac{2}{\pi} \log N$  pour tout  $x \in \Lambda_{(1-\eta)N}$ , où  $\eta > 0$  est arbitraire fixé. Ainsi, on obtient pour,  $x \in \Lambda_{(1-\eta)N}$ ,

$$\mathbb{P}_N^0(\varphi_x \in [-a, a]) = \mathbb{P}(\sigma_N(x)Z \in [-a, a]) \sim \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sigma_N(x)} \sim \frac{a}{\sqrt{\log N}},$$

d'où

$$\frac{1}{N^d} \mathbb{E}_N^0 \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right] \geq (1 + o(1))(1 - \eta)^d \frac{a}{\sqrt{\log N}} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Maintenant, en choisissant  $N_u = (1/u)^{4+\eta}$  dans (2.20), on en déduit que quand  $u \downarrow 0$ ,

$$F^0(u) \geq (1 + o(1))(1 - \eta)^d \frac{au}{\sqrt{\log N_u}} - c_0 N_u^{-1/4} \geq (1 + o(1)) \frac{(1 - \eta)^d}{\sqrt{4 + \eta}} \frac{u}{\sqrt{\log(1/u)}}.$$

Comme  $\eta$  est arbitraire, on en déduit la borne inférieure de (2.19).

*Note.* On pourrait améliorer cette borne inférieure pour obtenir un facteur  $a/\sqrt{2}$  au lieu de  $a/2$  : il suffit pour cela de remarquer que le Corollaire 2.8 reste valable en remplaçant  $c_0 N^{-1/4}$  par  $c_\eta N^{-1/2+\eta}$ , pour  $\eta > 0$  arbitraire. Cela permet notamment de choisir  $N_u = (1/u)^{2+\eta}$  et de gagner un facteur  $\sqrt{2}$  dans la borne inférieure de (2.19). L'Exercice 2.4 ci-dessous améliore encore ce facteur.

Tournons-nous maintenant vers la borne supérieure de (2.19). Commençons par montrer le fait suivant : pour tout  $N \geq 1$

$$F^0(u) \leq \frac{1}{N^d} \log \hat{Z}_{N,u} \quad \text{où} \quad \hat{Z}_{N,u} := \sup_{\xi} Z_{N,u}^{\xi}, \quad (2.21)$$

le supremum étant pris sur toutes les conditions au bord  $\xi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . En effet, en découpant  $\Lambda_{2N}$  en  $\Lambda_{N,v} = \Lambda_N + Nv$  pour  $v \in \{0, 1\}^d$ , en appliquant la propriété de Markov spatiale (en conditionnant par  $\Gamma = \Lambda_{2N} \setminus (\bigcup_{v \in \{0,1\}^d} \Lambda_{N,v})$ ) on obtient, pour toute

condition au bord  $\xi$ ,

$$Z_{2N,u}^\xi = E_N^0 \left[ \prod_{v \in \{0,1\}^d} Z_{\Lambda_{N,v},u}^\phi \right] \leq (\hat{Z}_{N,u})^{2^d}.$$

On en conclut que  $\frac{1}{(2N)^d} \log \hat{Z}_{2N,u} \leq \frac{1}{N^d} \log \hat{Z}_{N,u}$  pour tout  $N \geq 1$ , donc

$$F^0(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2^k N)^d} \log \hat{Z}_{2^k N,u} \leq \frac{1}{N^d} \log \hat{Z}_{N,u},$$

par décroissance de la suite  $(\frac{1}{(2^k N)^d} \log \hat{Z}_{2^k N,u})_{k \geq 1}$ .

Majorons maintenant  $\hat{Z}_{N,u}$ . Pour n'importe quelle condition au bord  $\xi$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial u} \log Z_{N,u}^\xi = \frac{1}{Z_{N,u}^\xi} E_N^\xi \left[ \left( \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right) e^{u \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a} \right] \leq e^{u N^d} E_N^\xi \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right],$$

où on a utilisé que  $u \geq 0$  pour minorer  $Z_{N,u}^\xi \geq 1$ . Maintenant, notons que sous  $P_N^\xi$  la variable  $\varphi_x$  est gaussienne de moyenne  $m_x^\xi$  et de variance  $\sigma_N^2(x) = G_{\Lambda_N}(x, x)$ . Ainsi, pour toute condition au bord  $\xi$ , on a

$$E_N^\xi[\delta_x^a] = P(\sigma_N(x)Z + m_x^\xi \in [-a, a]) \leq P(\sigma_N(x)Z \in [-a, a]) = E_N^0[\delta_x^a],$$

où on a utilisé le fait que la densité de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  est croissante sur  $\mathbb{R}_-$  et décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  pour voir que la fonction  $t \mapsto P(Z + t \in [-b, b])$  est maximale en  $t = 0$ .

On en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial u} \log Z_{N,u}^\xi \leq e^{u N^d} E_N^0 \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right] \implies \log Z_{N,u}^\xi \leq \frac{e^{u N^d} - 1}{N^d} E_N^0 \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right], \quad (2.22)$$

où on a simplement intégré la première inégalité entre 0 et  $u$  pour obtenir la seconde. Comme cette inégalité est valable pour toute condition au bord  $\xi$ , on en conclut que, pour tout  $N \geq 1$ ,

$$F^0(u) \leq \frac{1}{N^d} \log \hat{Z}_{N,u} \leq \frac{e^{u N^d} - 1}{N^d} \times \frac{1}{N^d} E_N^0 \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right]. \quad (2.23)$$

De la même manière que pour la borne inférieure, on obtient, quand  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{N^d} E_N^0 \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right] \leq (1 + o(1)) \frac{a}{\sqrt{\log N}} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Ainsi, en définissant  $N_u$  par  $u = b(N_u)^{-d}$  pour un  $b > 0$ , on obtient dans (2.23)

$$F^0(u) \leq (1 + o(1)) \frac{e^b - 1}{b} \frac{au}{\sqrt{\log N_u}} = (1 + o(1)) \frac{e^b - 1}{b} \frac{au}{\sqrt{\frac{1}{2} \log(1/u)}}.$$

Comme  $b > 0$  peut être choisi arbitrairement proche de 0, cela donne la borne supérieure de (2.19).  $\square$

## 2.4 Énergie libre et transition de phase en dimension $d \geq 3$

Dans cette section, on montre le résultat suivant.

**Théorème 2.18.** *En dimension  $d \geq 3$ , on a  $u_c^0 = u_c^+ = 0$ . De plus, on a les comportements asymptotiques suivants : il existent deux constantes  $c_0$  et  $c_+$  telles que,*

$$\text{quand } u \downarrow 0 \quad \begin{aligned} F^0(u) &\sim c_0 u, \\ F^+(u) &= \exp\left(- (1 + o(1)) c_+ \log(1/u)^2\right). \end{aligned}$$

Le fait que  $u_c^+ = 0$  avait déjà été observé dans [BDZ00], mais le comportement critique précis du Théorème 2.18 a été montré beaucoup plus récemment, dans [GL18]. On reprend ici les idées de la démonstration de [GL18].

### 2.4.1 Le cas sans contrainte (pinning)

Commençons par montrer le comportement asymptotique  $F^0(u) \sim c_0 u$  quand  $u \downarrow 0$ . La démonstration montrera que la constante vaut  $c_0 = P(|Z| \leq a/\sqrt{G_0})$ , où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $G_0 = G(0, 0)$  est la fonction de Green en 0 de la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^d$ . La stratégie de démonstration est très similaire au cas de la dimension  $d = 2$ .

*Borne inférieure.* On utilise de nouveau la convexité de  $u \mapsto \log Z_{N,u}^0$  pour obtenir

$$\frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0 \geq u \times \frac{1}{N^d} \frac{\partial}{\partial u} \log Z_{N,u}^0 \Big|_{u=0} = u \times \frac{1}{N^d} E_{N,u}^0 \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right].$$

Maintenant, on a  $E_N^0[\delta_x^a] = P(\sigma_N(x)Z \in [-a, a])$ , où  $\sigma_N^2(x) = G_{\Lambda_N}(x, x)$  est la variance de . Maintenant, quand  $N \rightarrow \infty$ , on a  $\sigma_N^2(x) \geq (1 + o(1))G_0$ , uniformément pour  $x \in \Lambda_N$  tel que  $N - |x| \rightarrow \infty$ . Cela montre que

$$F^0(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^0 \geq u \times P(\sqrt{G_0}Z \in [-a, a]).$$

*Borne supérieure.* On va de nouveau utiliser l'inégalité (2.21) avec (2.22), qui nous donne, de la même manière que dans (2.23) : pour tout  $N \geq 1$

$$F^0(u) \leq \frac{1}{N^d} (e^{uN^d} - 1) \frac{1}{N^d} E_N^0 \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right].$$

Cette fois, notons que  $E_N^0[\delta_x^a] = P(\sigma_N(x)Z \in [-a, a]) \leq P(\sqrt{G_0}Z \in [-a, a])$  car on a clairement  $\sigma_N^2(x) \leq G(0, 0)$ . Ainsi, on obtient

$$F^0(u) \leq c_0 \frac{1}{N^d} (e^{uN^d} - 1) \leq (1 + o(1))c_0 u,$$

où pour la deuxième inégalité on a appliqué la borne supérieure à un  $N_u \in \mathbb{N}$  tel que  $\lim_{u \downarrow 0} u(N_u)^d = 0$  (en particulier  $\lim_{u \downarrow 0} N_u = +\infty$ ).

### 2.4.2 Le cas avec contrainte (wetting)

On va donner une démonstration complète de la borne inférieure dans le cas avec contrainte : cela permet notamment de montrer que  $u_c^+ = 0$ . La borne supérieure est un peu plus technique : on donnera les étapes essentielles de la démonstration. Il s'avère que l'on peut obtenir la valeur précise de la constante,  $c_+ = \frac{G_0}{2a^2}$ .

#### Borne inférieure

*Étape 1.* La première étape consiste à considérer un modèle un peu différent, en rendant la contrainte de mur dur “moins dure”, c'est-à-dire à rendre le mur perméable, d'une certaine manière. Pour  $K \geq 0$ , on pose

$$Z_{N,u,K}^\xi := E_N^\xi \left[ \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\varphi_x \in [0,a]\}} - K \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\varphi_x < 0\}} \right) \right],$$

et on note  $P_{N,u,K}^\xi$  la mesure de Gibbs naturellement associée à cette fonction de partition. Dans ce cas, la surface est simplement *pénalisée* lorsqu'elle prend des valeurs négatives, le paramètre  $K$  gérant l'intensité de la pénalisation. Notons que si on prend  $K = +\infty$ , alors on retrouve  $Z_{N,u}^{\xi,+} = Z_{N,u,\infty}^\xi$ . On montre le lemme suivant sur le modèle avec mur perméable.

**Lemme 2.19.** Si  $F_K(u) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u,K}^0$ , alors on a l'encadrement :

$$F_K(u) \geq F_\infty(u) = F^+(u) \geq F_K(u) - e^{-K}.$$

*Démonstration.* La borne supérieure est évidente (on a une décroissance en  $K$ ), donc on se concentre sur la borne inférieure. Introduisons, pour tout  $A \subset \Lambda_N$ , l'événement  $E_A := \{\varphi \in \mathbb{R}^{\Lambda_N}, \{x \in \Lambda_N, \varphi < 0\} = A\}$ , en observant que  $E_\emptyset = \Omega_N^+$ . Ainsi, en décomposant suivant l'ensemble  $A$  des points où  $\varphi_x < 0$ , on obtient

$$Z_{N,u,K}^0 = \sum_{A \subset \Lambda_N} e^{-K|A|} E_N^0 \left[ \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\varphi_x \in [0,a]\}} \right) \mathbb{1}_{E_A} \right].$$

On va maintenant montrer que, pour tout  $A \subset \Lambda_N$ ,

$$E_N^0 \left[ \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\varphi_x \in [0,a]\}} \right) \mathbb{1}_{E_A} \right] \leq Z_{N,u}^+. \quad (2.24)$$

En effet, avec cette inégalité, avec la décomposition précédente, on obtient

$$Z_{N,u,K}^0 \leq Z_{N,u}^+ \sum_{A \subset \Lambda_N} e^{-K|A|} = Z_{N,u}^+ (1 + e^{-K})^{N^d} \leq Z_{N,u}^+ \exp(e^{-K})$$

où on a utilisé la formule du binôme, puis l'inégalité  $1 + x \leq e^x$ . On en conclut que  $\frac{1}{N^d} \log Z_{N,u,K}^+ \leq \frac{1}{N^d} \log Z_{N,u}^+ + e^{-K}$ , ce qui prouve la borne inférieure voulue.

Il reste à démontrer (2.24). On écrit simplement ce à quoi correspond l'espérance : en reprenant la définition de la mesure de Gibbs  $P_N^0$ , on obtient

$$\mathbb{E}_N^0 \left[ \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\varphi_x \in [0, a]\}} \right) \mathbb{1}_{E_A} \right] = \frac{1}{W_N^0} \int_{E_A} e^{u \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{h_x \in [0, a]\}}} e^{-H_N^0(h)} dh.$$

On effectue maintenant un changement de variable  $h \rightarrow \tilde{h}$  en posant  $\tilde{h}_x = -h_x$  pour  $x \in A$  et  $\tilde{h}_x = h_x$  pour  $x \notin A$ , de sorte que si  $h \in E_A$  alors  $\tilde{h} \in E_\emptyset$  : le Jacobien du changement de variable est égal à 1 et on a les inégalités  $\mathbb{1}_{\{\tilde{h}_x \in [0, a]\}} \geq \mathbb{1}_{\{h_x \in [0, a]\}}$  et  $H_N^0(\tilde{h}) \leq H_N^0(h)$  (on a réduit certains différences  $h_x - h_y$ ). Ainsi, on obtient

$$\mathbb{E}_N^0 \left[ \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\varphi_x \in [0, a]\}} \right) \mathbb{1}_{E_A} \right] = \frac{1}{W_N^0} \int_{E_\emptyset} e^{u \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\tilde{h}_x \in [0, a]\}}} e^{-H_N^0(\tilde{h})} d\tilde{h} = Z_{N,u}^+,$$

qui est l'inégalité voulue.  $\square$

*Étape 2.* Le lemme suivant permet « d'élever » les conditions aux bords.

**Lemme 2.20.** *Pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , on a*

$$F_K(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \mathbb{E}_\infty^r [\log Z_{N,u,K}^\phi],$$

où  $\mathbb{P}_\infty^r$  est la mesure en volume infini du GFF avec moyenne (constante égale à)  $r$ .

**Exercice 2.3.** Démontrer le Lemme 2.20. On pourra utiliser le Lemme 2.5 de changement de conditions au bord, ainsi que l'Exercice 1.7.

*Étape 3.* Grâce à l'inégalité de Jensen, on a, pour toute condition au bord  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \log Z_{N,u,K}^\phi &= \log \mathbb{E}_N^\phi \left[ \exp \left( u \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\varphi_x \in [0, a]\}} - K \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\varphi_x < 0\}} \right) \right] \\ &\geq \mathbb{E}_N^\phi \left[ u \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\varphi_x \in [0, a]\}} - K \sum_{x \in \Lambda_N} \mathbb{1}_{\{\varphi_x < 0\}} \right]. \end{aligned}$$

Grâce à la propriété de Markov spatiale pour la mesure de Gibbs  $\mathbb{P}_\infty^r$ , on a l'identité  $\mathbb{E}_\infty^r [\mathbb{E}_N^\phi[F(\varphi_{\Lambda_N})]] = \mathbb{E}_\infty^r[F(\varphi_{\Lambda_N})]$ . Ainsi, en prenant l'espérance sous  $\mathbb{P}_\infty^r$  dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^d} \mathbb{E}_\infty^r [\log Z_{N,u,K}^\phi] &\geq \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \Lambda_N} (u \mathbb{P}_\infty^r(\varphi_x \in [0, a]) - K \mathbb{P}_\infty^r(\varphi_x < 0)) \\ &= u \mathbb{P}(\sqrt{G_0}Z + r \in [0, a]) - K \mathbb{P}(\sqrt{G_0}Z + r < 0) \end{aligned}$$

pour  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , où on a utilisé que sous  $\mathbb{P}_\infty^r$  les  $\varphi_x$  sont de loi  $\mathcal{N}(r, G_0)$ . Grâce aux Lemmes 2.19 et 2.20, on en conclut que, pour tout  $r \in \mathbb{R}$  et  $K \geq 0$  :

$$F^+(u) \geq F_K(u) - e^{-K} \geq u \mathbb{P}(Z + r \in [0, b]) - K \mathbb{P}(Z + r < 0) - e^{-K},$$

où on a posé  $b = a/\sqrt{G_0}$  (et on a remplacé  $r/\sqrt{G_0}$  par  $r$ ).

*Conclusion.* Il reste à optimiser sur les choix  $K$  et  $r$  en fonction de  $u, b$  et à faire des calculs gaussiens. On va prendre

$$K = \log(1/u)^3, \quad r = \frac{1}{b} \log(3K/u) = (1 + o(1)) \frac{1}{b} \log(1/u),$$



qui tendent notamment vers  $+\infty$  quand  $u \downarrow 0$ . En utilisant que  $P(Z > t) \sim \frac{1}{t\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$  quand  $t \rightarrow \infty$ , on obtient

$$P(Z + r \in [0, b]) \sim \frac{1}{r\sqrt{2\pi}}e^{-(r-b)^2/2}, \quad P(Z + r < 0) \sim \frac{1}{r\sqrt{2\pi}}e^{-r^2/2},$$

donc quand  $u$  est suffisamment petit

$$uP(Z + r \in [0, b]) - KP(Z + r < 0) \geq \frac{1}{r\sqrt{2\pi}}e^{-r^2/2}(ue^{ar} - 2K) \geq \frac{K}{r\sqrt{2\pi}}e^{-r^2/2},$$

où on a utilisé la définition de  $r$  pour la dernière égalité.

Avec le choix de  $r$  et  $K$  plus haut, on obtient donc

$$F^+(u) \geq \frac{K}{r\sqrt{2\pi}}e^{-r^2/2} - e^{-K} = e^{-(1+o(1))\frac{1}{2b^2}\log(1/h)^2} - e^{-\log(1/h)^3},$$

qui donne la borne inférieure voulue, le deuxième terme étant négligeable par rapport au premier.

### Borne supérieure

La borne supérieure est un peu plus technique et est traitée dans la Section 3 de [GL18] : après une certaine réduction du problème, elle repose aussi sur des calculs gaussiens. On résume ici les étapes de la démonstration, et on renvoie à [GL18] pour les détails : le but est simplement de majorer  $F_K(u)$  pour  $K > 0$ .

*Étape 1.* On fixe une taille  $L$  grande (mais fixée), puis on utilise l'inégalité de Hölder pour se ramener à traiter une fonction de partition où la somme  $\sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x$  est remplacée par une somme  $\sum_{x \in \Lambda_N \cap L\mathbb{Z}^d} \delta_x$ , c'est-à-dire où les points sont sur une sous-grille espacée de  $L$ . Dans cette étape, à cause de l'inégalité de Hölder, les paramètres  $u, K$  sont multipliés par  $L^d$ .

*Étape 2.* On utilise la propriété de Markov spatiale pour découpler les points à distance  $L$  (en les rendant indépendants conditionnellement à un ensemble donné). On se ramène alors à estimer

$$E_L^\phi \left[ \exp \left( L^d (u \mathbb{1}_{\{\varphi_{x_0} \in [0, a]\}} - K \mathbb{1}_{\{\varphi_{x_0} < 0\}}) \right) \right],$$

où  $x_0$  est le centre de la boîte  $\Lambda_L$  et  $\phi$  est la condition au bord.

*Étape 3.* En utilisant que  $\varphi_{x_0}$  est de moyenne  $u_{x_0}^\phi$  et de variance  $\sigma_L^2$  (avec  $c_L \rightarrow G_0$  quand  $L \rightarrow \infty$ ), on majore le terme précédent en prenant la pire condition au bord possible. On se ramène à majorer

$$\begin{aligned} \sup_{r \in \mathbb{R}} E \left[ \exp \left( L^d (u \mathbb{1}_{\{\sigma_L Z + r \in [0, a]\}} - K \mathbb{1}_{\{\sigma_L Z + r < 0\}}) \right) \right] \\ = \sup_{r \in \mathbb{R}} E \left[ \exp \left( L^d (u \mathbb{1}_{\{Z + r \in [0, b_L]\}} - K \mathbb{1}_{\{Z + r < 0\}}) \right) \right], \end{aligned}$$

en ayant posé  $b_L := a/\sigma_L$ , avec  $b_L \rightarrow a/\sqrt{G_0}$ .

*Étape 4.* On fait des calculs gaussiens et on conclut la démonstration.

## 2.5 Quelques exercices

**Exercice 2.4 (Accrochage du GFF en dimension  $d = 2$ ).** On améliore dans cet exercice la borne inférieure (2.19), pour obtenir

$$F^0(u) \geq (1 + o(1)) \frac{au}{\sqrt{\log(1/u)}} \quad \text{quand } u \downarrow 0. \quad (2.25)$$

On introduit

$$\check{Z}_{N,u} := \inf_{\xi: \mathbb{Z}^d \rightarrow [-1,1]} Z_{N,u}^\xi,$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des conditions au bord à valeurs dans  $[-1, 1]$ .

1. Montrer que, pour  $u \geq 0$ , pour tout  $N \geq 1$

$$\check{Z}_{2N,u} \geq (\check{Z}_{N,u})^{2^d} \inf_{\xi: \mathbb{Z}^d \rightarrow [-1,1]} P_N^\xi(|\phi_x| \in [-1, 1], \forall x \in \Gamma)$$

où  $\Gamma = \Lambda_{2N} \setminus (\bigcup_{v \in \{0,1\}^d} \Lambda_{N,v})$  comme au-dessus.

2. En utilisant le Lemme 1.35 (en utilisant la Remarque 1.36), montrer qu'il existe une constante  $c$  telle que

$$\frac{1}{(2N)^d} \log \check{Z}_{2N,u} \geq \frac{1}{N^d} \log \check{Z}_{N,u} - cN^{-1}(\log N)^2.$$

En déduire que, si  $N$  est suffisamment grand, la suite

$$\left( \frac{1}{(2^k N)^d} \log \check{Z}_{2^k N,u} - 3c(2^k N)^{-1}(\log 2^k N)^2 \right)_{k \geq 0}$$

est croissante, puis que  $F^0(u) \geq \frac{1}{N^d} \log \check{Z}_{N,u} - 3cN^{-1}(\log N)^2$ .

3. Montrer que si  $\xi$  est à valeurs dans  $[-1, 1]$ , on a

$$P_N^\xi(\phi_x \in [-a, a]) \geq P(\sigma_N(x)Z \in [1-a, 1+a])$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . En utilisant le fait que si  $\eta > 0$  est fixé, pour  $N$  assez grand on a  $\sigma_N^2(x) \geq (1 - \eta) \frac{2}{\pi} \log N$  pour tout  $x \in \Lambda_{(1-\eta)N}$ , montrer que pour  $N$  suffisamment grand

$$\inf_{\xi: \mathbb{Z}^d \rightarrow [-1,1]} E_N^\xi \left[ \sum_{x \in \Lambda_N} \delta_x^a \right] \geq (1 - \eta)^{2+d} N^d \frac{a}{\sqrt{\log N}}.$$

4. En réutilisant la démonstration de la borne inférieure de (2.19), montrer que pour tout  $N$  suffisamment grand on a

$$F^0(u) \geq (1 - \eta)^{2+d} \frac{au}{\sqrt{\log N}} - 3cN^{-1}(\log N)^2,$$

En déduire la borne inférieure (2.25).

**Exercice 2.5 (Modèle de co-membrane).** On considère la mesure suivante, en dimension  $d \geq 2$  :

$$\frac{d\check{\mathbf{P}}_{N,u}}{d\mathbf{P}_{\Lambda_N}^0} = \frac{1}{\check{Z}_{N,u}} \exp\left(u \sum_{x \in \Lambda_N} \Delta_x\right), \quad \text{où } \Delta_x = \mathbb{1}_{\{\varphi_x > 0\}},$$

et  $\check{Z}_{N,u}$  est la fonction de partition du modèle. Pour  $A$  un événement, on note

$$\check{Z}_{N,u}(A) = \mathbf{E}_{\Lambda_N}^0 \left[ \exp\left(u \sum_{x \in \Lambda_N} \Delta_x\right) \mathbb{1}_A \right],$$

de sorte que  $\check{\mathbf{P}}_{N,u}(A) = \check{Z}_{N,u}(A)/\check{Z}_{N,u}$ . On note  $\Omega_N^+ := \{\varphi_x > 0 \forall x \in \Lambda_N\}$ .

1. Montrer que pour tout  $u \geq 0$ ,  $e^{uN^d} \mathbf{P}_{\Lambda_N}^0(\Omega_N^+) \leq \check{Z}_{N,u} \leq e^{uN^d}$ .

2. Montrer que  $\mathbf{P}_{\Lambda_N}^0(\Omega_N^+) \leq \check{Z}_{N,u} \leq 1$  pour tout  $u \leq 0$ .

3. Conclure que

$$\check{F}(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nd} \log \check{Z}_{N,u} = \max(0, u).$$

4. Soit  $u \neq 0$  et soit  $\alpha_N := -\frac{2}{|u|} \log \mathbf{P}_{\Lambda_N}^0(\Omega_N^+)$ . Rappeler le comportement de  $\alpha_N$ , puis montrer que :

a. Si  $u < 0$ , alors

$$\check{Z}_{N,u} \left( \sum_{x \in \Lambda_N} \Delta_x \geq \alpha_N \right) \leq e^{u\alpha_N} \leq e^{-|u|\alpha_N} \check{Z}_{N,u}.$$

En conclure que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \check{\mathbf{P}}_{N,h} \left( \sum_{x \in \Lambda_N} \Delta_x \geq \alpha_N \right) = 0$ ;

b. Si  $u < 0$ , alors

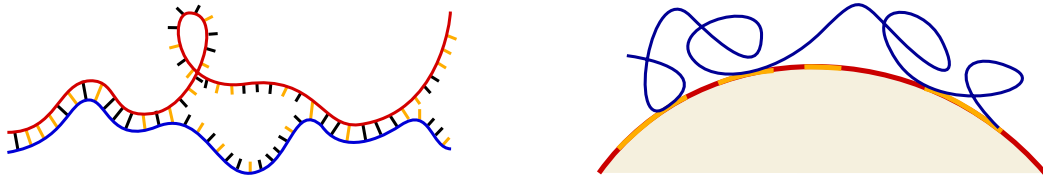
$$\check{Z}_{N,h} \left( \sum_{x \in \Lambda_N} \Delta_x \leq N^d - \alpha_N \right) \leq e^{uN^d - u\alpha_N} \leq e^{-|u|\alpha_N} \check{Z}_{N,u}.$$

En conclure que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \check{\mathbf{P}}_{N,h} \left( \sum_{x \in \Lambda_N} \Delta_x \leq N^d - \alpha_N \right) = 0$ .

## Chapitre 3

# Modèle d'accrochage désordonné : premières propriétés et diagramme de phase

Le modèle d'accrochage présenté dans cette partie dérive d'une longue histoire et possède plusieurs champs d'applications. Il a été introduit par Poland et Scheraga [PS70] pour décrire la transition de dénaturation de l'ADN; il a aussi été étudié par Fisher [Fis84] en tant que modèle d'accrochage d'une marche aléatoire sur un mur dur (modèle de wetting introduit dans les chapitres précédents, qui permet par exemple de modéliser une interface).



**FIG. 3.1** Deux exemples de situations physiques/bio-physiques décrites par le modèle d'accrochage : dénaturation de l'ADN (à gauche) et accrochage d'une protéine sur une cellule (à droite).

### 3.1 Introduction du modèle d'accrochage (pinning)

On va introduire directement le modèle dans un cadre désordonné. Les notations vont être un peu différentes par rapport aux chapitres précédents (notamment concernant les paramètres du modèle), pour coller à la majorité de la littérature.

Soit  $(S_i)_{i \geq 0}$  une chaîne de Markov sur  $\mathbb{Z}^d$  (pour un  $d \geq 1$ ), issue de  $S_0 = 0$ ; on note  $P$  sa loi. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la trajectoire  $(i, S_i)_{1 \leq i \leq n}$ , qui représente un polymère dirigé. Le polymère interagit avec une ligne de défaut (représentée par  $\mathbb{N} \times \{0\}$ ) lorsqu'il entre en contact avec elle, c'est-à-dire quand  $S_i = 0$ . Comme les interactions n'ont lieu que lorsque  $S_i = 0$ , on peut considérer directement l'ensemble des temps de retour  $\tau = \{i, S_i = 0\}$ , qui est ce qu'on appelle un *processus de renouvellement* :  $\tau_0 = 0$ , et  $(\tau_k - \tau_{k-1})_{k \geq 1}$  sont des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . La loi de  $\tau = (\tau_k)_{k \geq 0}$  sera notre loi de référence, notée  $P$ .

On verra aussi  $\tau = \{\tau_k\}_{k \geq 0}$  comme un ensemble de points de  $\mathbb{N}$ , appelés *points de renouvellement* (représentant les points de contact du polymère avec la ligne de défauts); on notera notamment  $\{n \in \tau\}$  l'événement que  $n$  est un point de renouvellement, c'est-à-dire qu'il existe un  $k \geq 0$  tel que  $\tau_k = n$ . On notera,

$$\text{pour } n \geq 1, \quad K(n) := P(\tau_1 = n), \quad K(\infty) = P(\tau_1 = +\infty),$$

que l'on appellera *loi inter-arrivée*. On dira que le processus de renouvellement  $\tau$  est *persistant* (ou récurrent) si  $K(\infty) = 0$  (en particulier  $|\tau| = +\infty$  presque sûrement) et *fini* (ou transient) si  $K(\infty) > 0$  (en particulier  $|\tau| < +\infty$  suit une loi géométrique de paramètre  $K(\infty)$ ).

### 3.1.1 Modèle homogène

Le modèle homogène consiste à considérer la mesure de Gibbs suivante, analogue à (2.13) : pour une longueur  $N \geq 1$  et pour  $h \in \mathbb{R}$  (le paramètre d'accrochage), on définit

$$\frac{dP_{N,h}}{dP}(\tau) := \frac{1}{Z_{N,h}} \exp\left(h \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}\right) \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}}.$$

*Remarque 3.1.* Noter que cette définition inclut les modèles d'accrochage d'interface en dimension  $d = 1$  considérés dans la Section 2.2, à la fois le cas sans contrainte et avec contrainte : il suffit pour cela de considérer comme processus de renouvellement sous-jacent le processus  $\tau$  défini en (2.14) ou le processus  $\tau^+$  défini en (2.16).

On va faire l'hypothèse suivante concernant le processus de renouvellement : il existe un  $\alpha \geq 0$  et une fonction à variations lentes  $L(\cdot)$  telle que, pour  $n \geq 1$  :

$$K(n) := \mathbf{P}(\tau_1 = n) = L(n)n^{-(1+\alpha)}. \quad (*)$$

Une fonction à variation lente  $L(\cdot)$  est une fonction qui vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(tn)}{L(n)} = 1$  pour tout  $t > 0$  ; un exemple standard est une fonction poly-logarithmique,  $L(n) \sim c(\log n)^a$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Une référence complète pour les fonctions à variations lentes est [BGT89], un résumé des propriétés utiles<sup>1</sup> peut être trouvé dans [Gia07, App. A.4].

L'hypothèse (\*) est vérifiée par exemple si  $\tau = \{n, S_{2n} = 0\}$  où  $(S_n)_{n \geq 0}$  est la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^d$  : on a

- $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$  si  $d = 1$  (voir par exemple [Fel66, Ch. III]) ;
- $\alpha = 0$  et  $L(n) \sim \frac{\pi}{(\log n)^2}$  si  $d = 2$  (cf. [JP72, Thm. 4]) ;
- $\alpha = \frac{d}{2} - 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = c_d$  si  $d \geq 3$  (cf. [DK11, Thm. 4]).

On considérera souvent le cadre un peu plus simple où la fonction à variation lente converge vers une constante, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $c_1$  telle que

$$K(n) := \mathbf{P}(\tau_1 = n) \sim c_1 n^{-(1+\alpha)} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (\tilde{*})$$

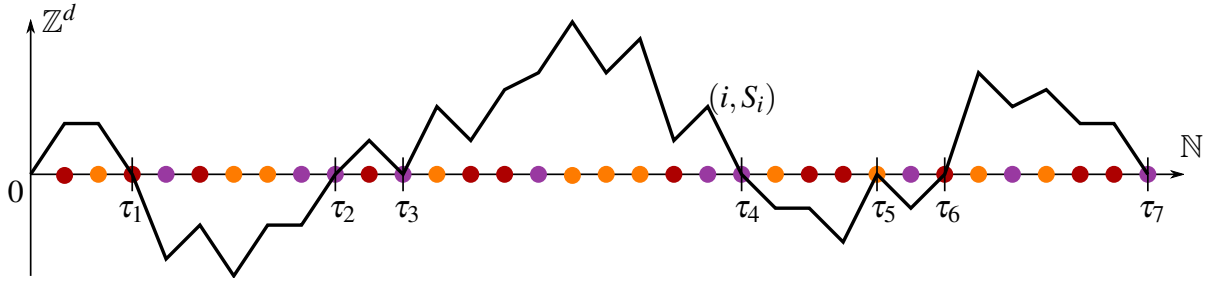
### 3.1.2 Modèle désordonné

Pour définir le modèle désordonné, on considère une suite  $\omega = (\omega_i)_{i \geq 0}$  de variables aléatoires i.i.d., de loi notée  $\mathbb{P}$  : les  $\omega_i$  représentent les inhomogénéités le long de la ligne de défaut (ou du polymère) et vont perturber les interactions entre le polymère et la ligne de défaut, voir la Figure 3.2. On suppose que  $\mathbb{E}[\omega_i] = 0$ ,  $\mathbb{E}[\omega_i^2] = 1$ .

Pour une réalisation donnée de  $\omega$  (désordre *gelé* ou *trempe*) et pour  $\beta \geq 0$ ,  $h \in \mathbb{R}$ , on définit pour  $N \geq 1$  la *mesure d'accrochage* (ou de pinning)  $P_{N,h}^{\beta,\omega}$  comme une mesure de

1. On peut notamment montrer les propriétés suivantes :

- pour tous  $0 < a < b < \infty$ , la convergence  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(tn)}{L(n)} = 1$  est uniforme en  $t \in [a, b]$  ;
- $L(n) = n^{o(1)}$  quand  $n \rightarrow \infty$  ;
- quand  $x \rightarrow \infty$  : si  $\gamma > -1$ ,  $\sum_{n=1}^x n^\gamma L(n) \sim \frac{1}{1+\gamma} x^{1+\gamma} L(x)$  ; si  $\gamma < -1$ ,  $\sum_{n=x}^{+\infty} n^\gamma L(n) \sim \frac{-1}{1+\gamma} x^{1+\gamma} L(x)$ .



**FIG. 3.2** La trajectoire du polymère est représentée par la suite  $(i, S_i)$ , qui représente la position du  $i$ -ème monomère. Les interactions ont lieu le long de la ligne de défauts, aux site où  $S_i$  revient en 0, c'est-à-dire aux instants  $\tau_1, \tau_2, \dots$ . La ligne de défaut (ou le polymère, ou les deux) est inhomogène, représentée par des variables aléatoires  $(\omega_i)_{i \geq 0}$  attachées aux différents sites.

Gibbs par rapport à la loi de référence P :

$$\frac{dP_{N,h}^{\beta,\omega}}{dP}(\tau) := \frac{1}{Z_{N,h}^{\beta,\omega}} \exp \left( \sum_{i=1}^n (h + \beta \omega_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right) \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}}, \quad (3.1)$$

où la fonction de partition du modèle est donnée par

$$Z_{N,h}^{\beta,\omega} := E \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (h + \beta \omega_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right) \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}} \right]. \quad (3.2)$$

La mesure  $P_{N,\beta,h}^\omega$  correspond à donner une « récompense »  $h + \beta \omega_i$  (où une « pénalité » selon le signe) si le polymère touche la ligne de défaut au site  $i$ . On peut ainsi voir le modèle désordonné comme une *perturbation aléatoire* du modèle d'accrochage homogène ; notons que si  $\beta = 0$ , on retombe d'ailleurs sur le modèle homogène.

Noter que l'on a ajouté dans (3.1)-(3.2) la fonction indicatrice  $N \in \tau$ , forçant le point final à être accroché ; cela correspond à avoir une condition au bord nulle. On peut aussi enlever cette contrainte et considérer le modèle *libre* :

$$\frac{d\tilde{P}_{N,h}^{\beta,\omega}}{dP}(\tau) := \frac{1}{Z_{N,h}^{\beta,\omega}} \exp \left( \sum_{i=1}^n (h + \beta \omega_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right), \quad (3.3)$$

avec la fonction de partition

$$\tilde{Z}_{N,h}^{\beta,\omega} := E \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (h + \beta \omega_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right) \right]. \quad (3.4)$$

On verra plus loin que ce modèle libre a des propriétés proches du modèle originel (3.1)-(3.2), voir notamment la Remarque 3.10.

*Remarque 3.2.* Une remarque importante est que, par une translation du paramètre  $h$ , on peut toujours se ramener au cas où  $K(\infty) = 0$ , c'est-à-dire au cas où  $\tau$  est *persistent*. En effet, si on pose  $\hat{h} = h - \log P(\tau_1 < +\infty)$ , on peut écrire la fonction de partition en la décomposant suivant le nombre et les instants de renouvellement :

$$\begin{aligned}
Z_{N,h} &= \sum_{k=1}^N \sum_{t_0=0 < t_1 < \dots < t_k=N} \prod_{j=1}^k e^{\hat{h} + \beta \omega_{t_j}} K(t_j - t_{j-1}) \\
&= \sum_{k=1}^N \sum_{t_0=0 < t_1 < \dots < t_k=N} \prod_{j=1}^k e^{h + \beta \omega_{t_j}} \hat{K}(t_j - t_{j-1}) = \hat{\mathbb{E}} \left[ e^{\sum_{i=1}^N (h + \beta \omega_i) \mathbb{1}_{\{i \in \hat{\tau}\}} \mathbb{1}_{\{N \in \hat{\tau}\}}} \right],
\end{aligned}$$

où on a posé  $\hat{K}(n) := K(n)/P(\tau_1 < +\infty) = P(\tau_1 = n \mid \tau_1 < +\infty)$ , qui est la loi inter-arrivée d'un processus de renouvellement  $\hat{\tau}$ . Noter que  $\hat{K}$  vérifie  $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}(n) = 1$ , c'est-à-dire  $\hat{K}(\infty) = 0$ , et que la condition (\*) reste vérifiée, en divisant simplement la fonction à variation lente par  $P(\tau_1 < +\infty)$ .

### Objectif : comparaison des modèles homogènes et désordonnés

Le but de ce chapitre et du suivant est de comparer les comportements des modèles d'accrochage homogènes et désordonnés. On va chercher à répondre à plusieurs questions : notamment (dans l'ordre)

- Peut-on décrire précisément la transition de phase du modèle homogène ?
- Le modèle désordonné possède-t-il lui aussi une transition de phase ?
- Que peut-on dire sur la transition de phase du modèle désordonné ? En particulier
  - A-t-on un contrôle sur le point critique ?
  - A-t-on un contrôle sur le comportement au voisinage du point critique ?
  - Les caractéristiques de la transition de phase sont-elles différentes que pour le modèle homogène ?

Une question importante est celle de la *pertinence du désordre* : la question est de savoir si une intensité faible de désordre (représentée dans notre cas par le paramètre  $\beta$ ) modifie le comportement critique du modèle.

## 3.2 Retour sur le modèle homogène

Donnons directement les résultats concernant l'énergie libre, l'existence d'une transition de phase et le comportement au voisinage du point critique.

### Proposition 3.3. L'énergie libre

$$F(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \tilde{Z}_{N,h}$$

existe, est positive et vérifie  $F(h) = 0$  si  $h \leq 0$ . De plus,  $h \mapsto F(h)$  est croissante et convexe et en tout point où  $F$  est dérivable, on a

$$\frac{\partial}{\partial h} F(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{N,h} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{E}}_{N,h} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right].$$

Cette proposition est l'analogue exact de la Proposition 2.2 et la démonstration est identique. Notamment, l'existence de l'énergie libre est due à la sur-additivité de  $\log Z_{N,h}$  (et au Lemme de Fekete).

Le seul point qui mérite un commentaire est le fait que la limite est la même si l'on remplace la fonction de partition  $Z_{N,h}$  par sa version *libre*  $\tilde{Z}_{N,h}$  (pour laquelle on n'a pas de sur-additivité). On le laisse en exercice, voir ci-dessous.

### 3.2.1 Transition de phase

La Proposition 3.3 montre que l'on peut définir le point critique

$$h_c := \sup \{h \in \mathbb{R}, F(h) = 0\} = \inf \{h \in \mathbb{R}, F(h) > 0\}.$$

Comme remarqué dans la Section 2.1.2, le point critique  $h_c$  marque une transition entre une phase *délocalisée* pour  $h < h_c$  (densité asymptotique de contact nulle) et une phase *localisée* pour  $h > h_c$  (densité asymptotique de contact strictement positive).

**Exercice 3.1.** On suppose que la loi inter-arrivée du processus de renouvellement  $\tau$  vérifie (\*), c'est-à-dire  $K(n) = P(\tau_1 = n) = L(n)n^{-(1+\alpha)}$ .

1. Montrer que  $\tilde{Z}_{N,h} = Z_{N,h} + \sum_{k=1}^N Z_{N-k,h} P(\tau_1 \geq k)$ .
2. Montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que  $P(\tau_1 \geq k)/P(\tau_1 = k) \leq Ck^{2+\alpha}$  pour tout  $k \geq 1$  (on pourra utiliser le deuxième point de la note 1 en bas de page 61), montrer que

$$Z_{N,h} \leq \tilde{Z}_{N,h} \leq (1 + Ce^{-h}N^{2+\alpha})Z_{N,h}.$$

3. Conclure que  $F(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \tilde{Z}_{N,h}$ .

**Exercice 3.2.** Montrer que  $0 \leq h_c \leq -\log(\sup_{n \geq 1} K(n))$ .

De manière analogue à (2.15) (voir aussi la Proposition 2.10 et le Lemme 2.12), on obtient la caractérisation suivante pour l'énergie libre.

**Proposition 3.4.** *L'énergie libre  $F(h)$  est la solution en  $\lambda$  de*

$$E[e^{-\lambda \tau_1}] = e^{-h}$$

*si une solution existe, et  $F(h) = 0$  sinon.*

On en déduit la généralisation suivante du Théorème 2.9; la généralisation est relative à l'hypothèse (\*) sur le processus de renouvellement.

**Théorème 3.5.** *On a  $h_c = -\log P(\tau_1 < +\infty)$  et le comportement critique suivant : sous l'hypothèse (\*) avec  $\alpha > 0$ , il existe une fonction  $\hat{L}(\cdot)$  à variation lente telle que, quand  $u \downarrow 0$ ,*

$$F(h_c + u) \sim \hat{L}(1/u) u^v \quad \text{avec } v := \max\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right).$$

*Si  $\alpha = 0$ , alors  $F(h_c + u) = o(u^p)$  quand  $u \downarrow 0$ , pour tout  $p > 0$ .*



- Si  $m_\tau := E[\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 < +\infty\}}] < +\infty$ , alors  $F(h_c + u) \sim \frac{P(\tau_1 < +\infty)}{m_\tau} u$  quand  $u \downarrow 0$ .
- Si on a  $(\tilde{*})$  avec  $\alpha \in ]0, 1[$ , alors  $F(h_c + u) \sim \left( \frac{\alpha P(\tau_1 < +\infty)}{c_1 \Gamma(1-\alpha)} \right)^{1/\alpha} u^{1/\alpha}$  quand  $u \downarrow 0$ .

Soulignons que grâce à la Remarque 3.2, on peut toujours se ramener au cas  $h_c = 0$ , quitte à changer la loi inter-arrivée  $K(n)$  par  $\hat{K}(n) = K(n)/P(\tau_1 < +\infty)$ , ce qui revient à faire une translation du paramètre  $h$ . (Noter que cela correspond à remplacer  $L(n)$  par  $L(n)/P(\tau_1 < +\infty)$  dans  $(*)$  et  $c_1$  par  $c_1/P(\tau_1 < +\infty)$  dans  $(\tilde{*})$ .)

*Démonstration.* Le fait que  $h_c = -\log P(\tau_1 < +\infty)$  est simplement lié au fait que  $\lim_{\lambda \downarrow 0} E[e^{-\lambda \tau_1}] = P(\tau_1 < +\infty)$ , de sorte que d'après la Proposition 3.4 on a  $F(h) > 0$  si et seulement si  $e^{-h} < P(\tau_1 < +\infty)$ .

Pour le comportement critique, la démonstration est similaire à celle du Théorème 2.9. L'idée est d'obtenir le comportement de  $E[e^{-\lambda \tau_1}]$  lorsque  $\lambda \downarrow 0$  et d'utiliser la Proposition 3.4 pour conclure, en considérant le fait que  $F(h) \downarrow 0$  quand  $h \downarrow h_c$ . On va montrer le lemme suivant, en se concentrant sur le cas où  $m_\tau < +\infty$  et sur le cas où  $(\tilde{*})$  est vérifié avec  $\alpha \in ]0, 1[$  ; on laisse les autres cas en exercice (voir plus bas).

**Lemme 3.6.** *Sous l'hypothèse  $(*)$ , il existe une fonction à variation lente  $\tilde{L}(\cdot)$  telle que, quand  $\lambda \downarrow 0$ ,*

$$P(\tau_1 < +\infty) - E[e^{-\lambda \tau_1}] \sim \tilde{L}(1/\lambda) \lambda^{\min(\alpha, 1)}.$$

- Lorsque  $m_\tau < +\infty$ , alors on peut prendre  $\tilde{L}(x) = m_\tau$ .
- Si  $\alpha \in ]0, 1[$  dans  $(*)$ , alors on peut prendre  $\tilde{L}(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} L(x)$ .

Avec ce lemme et la Proposition 3.4, en utilisant aussi que  $e^{-h_c} = P(\tau_1 < +\infty)$ , comme  $F(h) \downarrow 0$  quand  $h \downarrow h_c$ , on obtient

$$e^{-h_c}(h - h_c) \sim e^{-h_c} - e^{-h} = P(\tau_1 < +\infty) - E[e^{-F(h)\tau_1}] \sim \tilde{L}(1/F(h))F(h)^{\min(\alpha, 1)}$$

quand  $h \downarrow h_c$ . En inversant cette relation, on obtient le Théorème 3.5 (la fonction à variation lente  $\hat{L}(\cdot)$  est reliée à la fonction  $L(\cdot)$  et à l'exposant  $\min(\alpha, 1)$ , voir [BGT89, Thm. 1.5.13]). En particulier :

- Si  $m_\tau < +\infty$ , on a  $e^{-h_c}(h - h_c) \sim m_\tau F(h)$ , ce qui donne le résultat voulu ;
- Si  $(\tilde{*})$  est vérifié avec  $\alpha \in ]0, 1[$ , alors on a  $e^{-h_c}(h - h_c) \sim c_1 \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} F(h)^{1/\alpha}$ , ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

*Démonstration (du Lemme 3.6).* On commence par écrire  $P(\tau_1 = +\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_1 = n)$ , de sorte que

$$P(\tau_1 < +\infty) - E[e^{-\lambda \tau_1}] = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda n}) P(\tau_1 = n). \quad (3.5)$$

On va se concentrer sur les deux sous-cas mentionnés dans le lemme.

*Cas  $m_\tau < +\infty$ .* Notons que pour tout  $n$ , la fonction  $\lambda \mapsto \frac{1 - e^{-\lambda n}}{\lambda}$  est décroissante (et majorée par  $n$ ) et  $\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda n}}{\lambda} = n$  : par convergence monotone (ou dominée), on a

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left( P(\tau_1 < +\infty) - E[e^{-\lambda \tau_1}] \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau_1 = n) = m_{\tau},$$

ce qui donne le résultat voulu.

Cas  $\alpha \in ]0, 1[$ . On écrit dans ce cas

$$P(\tau_1 < +\infty) - E[e^{-\lambda \tau_1}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda n}}{n^{1+\alpha}} L(n) = \lambda^{\alpha} L(1/\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \frac{1 - e^{-\lambda n}}{(\lambda n)^{1+\alpha}} \frac{L(n)}{L(1/\lambda)}.$$

Dans le cas où  $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = c_1$  on a  $\frac{L(n)}{L(1/\lambda)} = (1 + o(1))c_1$ . Il suffit alors d'utiliser la convergence de la somme de Riemann (puis une intégration par partie)

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \frac{1 - e^{-\lambda n}}{(\lambda n)^{1+\alpha}} = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x^{1+\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} x^{-\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Le cas d'une fonction à variation lente  $L(\cdot)$  quelconque est un peu plus technique (voir [BGT89, Cor. 8.1.7]) : l'idée est que la contribution principale de la somme est pour  $n$  de l'ordre de  $1/\lambda$  (on peut contrôler la somme  $n \leq \varepsilon/\lambda$  et la somme  $n \geq 1/\varepsilon\lambda$ ), et que pour ces  $n \asymp 1/\lambda$  on a  $L(n)/L(1/\lambda) \rightarrow 1$ , par définition d'une fonction à variation lente.  $\square$

**Exercice 3.3 (Cas  $\alpha = 1$  dans le Lemme 3.6).** On va se concentrer dans un premier temps sur le cas où  $P(\tau_1 = n) \sim c_1 n^{-2}$  quand  $n \rightarrow \infty$  : en partant de (3.5), on admet que, quand  $\lambda \downarrow 0$  on a

$$P(\tau_1 < +\infty) - E[e^{-\lambda \tau_1}] \sim c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda n}}{n^2}.$$

1. Montrer que (on omet les parties entières pour simplifier les notations)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda n}}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{1/\lambda} \left( \frac{\lambda}{n} - \frac{1}{2} \lambda^2 \right) \geq \lambda (\log(1/\lambda) - \frac{1}{2}).$$

2. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda n}}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{1/\lambda} \frac{\lambda}{n} + \sum_{n=1/\lambda+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \lambda \log(1/\lambda) + 1 + \lambda.$$

3. En déduire que, quand  $\lambda \downarrow 0$ ,

$$P(\tau_1 < +\infty) - E[e^{-\lambda \tau_1}] \sim c_1 \lambda \log(1/\lambda).$$

En conclure le comportement de  $F(h)$  quand  $h \downarrow h_c$  dans ce cas.

On suppose maintenant (\*) avec  $\alpha = 1$  :  $P(\tau_1 = n) = L(n)n^{-2}$  avec  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n} = +\infty$  (sinon  $m_{\tau} < +\infty$ ). On pose  $L^*(n) = \sum_{k=1}^n \frac{L(k)}{k}$ , qui vérifie donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} L^*(n) = +\infty$ .

4. Montrer que pour tout  $t > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^*(n) - L^*(tn)}{L(n)} = \log(1/t)$ .

En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^*(n)}{L(n)} = +\infty$  puis que  $L^*(\cdot)$  est à variation lente.

5. Montrer que, quand  $\lambda \downarrow 0$ , on a  $P(\tau_1 < +\infty) - E[e^{-\lambda \tau_1}] \sim \lambda L^*(1/\lambda)$ .

(On pourra utiliser la troisième propriété de la note 1 en bas de page 61.) Cela montre le Lemme 3.6 dans le cas  $\alpha = 1$ , avec  $\tilde{L} = L^*$ .

**Exercice 3.4 (Cas  $\alpha = 0$  dans le Lemme 3.6.).** On suppose que  $P(\tau_1 = n) = L(n)n^{-1}$ , avec en particulier  $\sum_{k=1}^{\infty} L(k)k^{-1} = P(\tau_1 < +\infty) < +\infty$ . On pose  $L^*(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{L(k)}{k}$ , qui vérifie donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} L^*(n) = 0$ .

1. Comme dans l'exercice précédent, montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^*(n)}{L(n)} = +\infty$  et que  $L^*(\cdot)$  est à variation lente.

2. Montrer que, quand  $\lambda \downarrow 0$ , on a  $P(\tau_1 < +\infty) - E[e^{-\lambda \tau_1}] \sim L^*(1/\lambda)$ .

(On pourra utiliser la troisième propriété de la note 1 en bas de page 61.) Cela montre le Lemme 3.6 dans le cas  $\alpha = 0$ , avec  $\tilde{L} = L^*$ .

### 3.2.2 Propriétés trajectorielles

Pour  $h \in \mathbb{R}$ , on introduisons la loi inter-arrivée suivante : pour  $n \geq 1$

$$K_h(n) := e^h K(n) e^{-F(h)n}. \quad (3.6)$$

On y associe alors un processus de renouvellement  $\tau^{(h)} = (\tau_k^{(h)})_{k \geq 1}$  de loi notée  $P^{(h)}$ , en posant  $P^{(h)}(\tau^{(h)} = n) = K_h(n)$ . Notons que,

$$\begin{aligned} \text{si } h \geq h_c, \quad & \sum_{n=1}^{\infty} K_h(n) = e^h E[e^{-F(h)\tau_1}] = 1 \\ \text{si } h < h_c, \quad & \sum_{n=1}^{\infty} K_h(n) = e^h P(\tau_1 < +\infty) < 1. \end{aligned}$$

En particulier, si  $h \geq h_c$  alors le processus de renouvellement  $\tau^{(h)}$  est persistant (récurrent), alors que si  $h < h_c$  le processus  $\tau^{(h)}$  est fini (transient). Commençons par la proposition suivante :

**Proposition 3.7.** On a  $Z_{N,h} = e^{F(h)N} P^{(h)}(N \in \tau^{(h)})$  et on peut décrire la mesure d'accrochage  $P_{N,h}$  comme suit :

$$P_{N,h}(\cdot) = P^{(h)}(\cdot \mid N \in \tau^{(h)}).$$

*Démonstration.* Commençons par montrer le premier point. En décomposant suivant le nombre et les instants de renouvellement, on a

$$\begin{aligned} Z_{N,h} &= \sum_{k=1}^N \sum_{t_0=0 < t_1 < \dots < t_k=N} \prod_{j=1}^k e^h K(t_j - t_{j-1}) \\ &= e^{F(h)N} \sum_{k=1}^N \sum_{t_0=0 < t_1 < \dots < t_k=N} \prod_{j=1}^k K_h(t_j - t_{j-1}) = e^{F(h)N} P^{(h)}(N \in \tau^{(h)}) \end{aligned}$$

où on a utilisé la définition (3.6) de  $K_h$  (et le fait que  $\prod_{j=1}^k e^{-F(h)(t_j-t_{j-1})} = e^{F(h)N}$ ), puis la décomposition de l'événement  $\{N \in \tau^{(h)}\}$  suivant le nombre et les instants de renouvellement.

Montrons la caractérisation de  $P_{N,h}$  : pour tous  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = N$ , on a

$$\begin{aligned} P_{N,h}(\tau_1 = t_1, \dots, \tau_k = t_k) &= \frac{1}{Z_{N,h}} e^{kh} \prod_{j=1}^k K(t_j - t_{j-1}) \\ &= \frac{1}{P^{(h)}(N \in \tau^{(h)})} \prod_{j=1}^k K_h(t_j - t_{j-1}) = P^{(h)}(\tau_1 = t_1, \dots, \tau_k = t_k \mid N \in \tau^{(h)}) \end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité  $Z_{N,h} = e^{F(h)N} P^{(h)}(N \in \tau^{(h)})$  (avec  $e^{-F(h)N} = \prod_{j=1}^k e^{-F(h)(t_j-t_{j-1})}$ ) et la définition (3.6) de  $K_h$ . Cela montre que  $P_{N,h}(\tau = A) = P^{(h)}(\tau^{(h)} = A \mid N \in \tau^{(h)})$  pour tout  $A \subset \{0, \dots, N\}$ , qui est la propriété annoncée.  $\square$

Les estimées sur la fonction de renouvellement  $P^{(h)}(N \in \tau)$  permettent de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 3.8.** *On a la limite de volume infinie suivante : pour  $h \in \mathbb{R}$ , quand  $N \rightarrow \infty$*

$$P_{N,h}(\cdot) = P^{(h)}(\cdot \mid N \in \tau^{(h)}) \implies P^{(h)}.$$

Soulignons que cet énoncé cache trois régimes différents :

- Si  $h > h_c$ , alors  $\tau^{(h)}$  est récurrent positif,  $E^{(h)}[\tau_1^{(h)}] < +\infty$ ; noter que  $K_h(n)$  décroît exponentiellement vite.
- Si  $h = h_c$ , alors  $\tau^{(h)}$  est récurrent positif où récurrent nul, suivant que  $\sum_{n=1}^{\infty} nK(n)$  est fini ou infini; noter que  $K_h(n)$  décroît polynomialement, voir (\*);
- Si  $h < h_c$ , alors  $\tau^{(h)}$  est transient; noter que  $K_h(n)$  décroît polynomialement, voir (\*).

*Démonstration.* Soient  $0 < t_1 < \dots < t_k$  fixé. Pour  $N \geq t_k$ , grâce à la Proposition 3.7,

$$\begin{aligned} P_{N,h}(\tau_1 = t_1, \dots, \tau_k = t_k) &= \frac{1}{P^{(h)}(N \in \tau^{(h)})} P^{(h)}(\tau_1 = t_1, \dots, \tau_k = t_k, N \in \tau^{(h)}) \\ &= \frac{P^{(h)}(N - t_k \in \tau^{(h)})}{P^{(h)}(N \in \tau^{(h)})} P^{(h)}(\tau_1 = t_1, \dots, \tau_k = t_k). \end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer que pour tout  $t \in \mathbb{N}$  on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P^{(h)}(N - t \in \tau^{(h)})}{P^{(h)}(N \in \tau^{(h)})} = 1, \quad (3.7)$$

qui est l'objet de la section suivante.  $\square$

### 3.2.3 Quelques propriétés des processus de renouvellement

Donnons maintenant quelques estimées utiles pour des processus de renouvellement. On se donne un processus de renouvellement  $\tau = (\tau_k)_{k \geq 1}$ , que l'on suppose apériodique,  $\text{pgcd}\{n, K(n) > 0\} = 1$ . On étudie alors la *fonction de renouvellement*  $u_n := P(n \in \tau)$ .

**Cas récurrent positif : Théorème de renouvellement.** Le théorème suivant est utile dans le cas d'un processus de renouvellement récurrent positif, c'est-à-dire lorsque  $E[\tau_1] < +\infty$  (et donne un résultat partiel dans les cas récurrent nul ou transient, où l'on a  $E[\tau_1] = +\infty$ ). Il permet de montrer (3.7) dans le cas  $h > h_c$ , ou dans le cas  $h = h_c$  avec  $\sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty$ , pour lesquels  $\tau^{(h)}$  est récurrent positif.

**Théorème (de renouvellement).** Soit  $\tau = (\tau_k)_{k \geq 0}$  un processus de renouvellement apériodique. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n \in \tau) = \frac{1}{E[\tau_1]}. \quad (3.8)$$

*Démonstration.* Donnons une démonstration rapide dans le cas récurrent ; il est facile de voir que dans le cas transient où  $K(\infty) > 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n \in \tau) = 0$ .

À tout renouvellement persistant on peut associer une chaîne de Markov  $(S_n)_{n \geq 0}$  sur  $\mathbb{Z}$  issue de 0 telle que  $\tau$  a la même loi que les temps de retours de la marche en 0,  $\tau = \{n, S_n = 0\}$ . Il suffit pour cela de considérer la chaîne de Markov de matrice de transition  $Q(0, x) = K(x - 1)$  et  $Q(x, x - 1) = 1$  pour  $x \geq 1$  (faire un dessin). La chaîne est récurrente si et seulement si  $P(\tau_1 < +\infty) = 1$  et est récurrente positive si et seulement si  $E[\tau_1] < +\infty$ .

Dans le cas récurrent, on peut facilement calculer les mesures invariantes pour la chaîne de Markov :  $\mu(x) = \mu(0)P(\tau_1 \geq x)$ , qui sont de masse finie si et seulement si  $\sum_{x \geq 0} P(\tau_1 \geq x) = E[\tau_1] < +\infty$ . La chaîne étant apériodique, la probabilité  $P(N \in \tau) = P(S_N = 0)$  converge dans le cas récurrent positif vers  $\pi(0) = \frac{1}{E[\tau_1]}$ , où  $\pi(x) = \frac{P(\tau_1 \geq x)}{E[\tau_1]}$  est l'unique probabilité invariante. Dans le cas récurrent nul,  $P(N \in \tau) = P(S_N = 0)$  converge vers  $0 = \frac{1}{E[\tau_1]}$ .  $\square$

**Cas récurrent nul.** Supposons maintenant que  $P(\tau_1 < +\infty) = 1$  mais que  $E[\tau_1] = +\infty$ , c'est-à-dire que le processus de renouvellement est récurrent nul. Pour estimer la fonction de renouvellement  $u_n = P(n \in \tau)$ , on va supposer que la loi inter-arrivée vérifie (\*) avec  $\alpha \in [0, 1]$ . Le résultat suivant permet de montrer (3.7) dans le cas  $h = h_c$  avec  $\sum_{n \geq 1} nK(n)$ , où  $\tau^{(h)}$  est récurrent nul (et  $K_h$  vérifie (\*) avec  $\alpha \in [0, 1]$ ).

**Théorème.** Supposons que  $P(\tau_1 < +\infty) = 1$  et que  $P(\tau_1 = n)$  vérifie (\*) avec  $\alpha \in [0, 1]$ . Alors, quand  $n \rightarrow \infty$

$$P(n \in \tau) \sim \begin{cases} \frac{1}{E[\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq n\}}]} & \text{si } \alpha = 1 ; \\ \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} L(n)^{-1} n^{-(1-\alpha)} & \text{si } \alpha \in ]0, 1[ ; \\ \frac{1}{P(\tau_1 \geq n)^2} P(\tau_1 = n) & \text{si } \alpha = 0 . \end{cases} \quad (3.9)$$

Le cas  $\alpha = 1$  est dû à [Eri70], le cas  $\alpha \in (0, 1)$  à [Don97], le cas  $\alpha = 0$  à [Nag12].

Soulignons que dans le cas  $\alpha = 1$ ,  $E[\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq n\}}] = \sum_{k=1}^n \frac{L(k)}{k} =: L^*(n)$  est une fonction à variation lente qui vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} L^*(n)/L(n) = +\infty$ , voir l'Exercice 3.3, question 4.

De même, dans le cas  $\alpha = 0$ ,  $P(\tau_1 \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{L(k)}{k} =: L^*(n)$  est une fonction à variation lente qui vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} L^*(n)/L(n) = +\infty$ , voir l'Exercice 3.4, question 1.

**Cas transient.** Supposons maintenant que  $K(\infty) = P(\tau_1 = +\infty) > 0$ . Le résultat suivant permet de montrer (3.7) dans le cas  $h < h_c$  où  $\tau^{(h)}$  est transient ( $K_h$  vérifie (\*)).

**Théorème.** *Supposons que  $K(\infty) > 0$  et que  $P(\tau_1 = n)$  vérifie (\*). Alors, quand  $n \rightarrow \infty$ ,*

$$P(n \in \tau) \sim \frac{1}{P(\tau_1 = \infty)^2} P(\tau_1 = n). \quad (3.10)$$

Pour une référence, on renvoie à [Gia07, Thm. A.4]. Noter l'analogie avec le cas récurrent  $\alpha = 0$  (aussi, ce théorème admet une réciproque, voir [AB16, Thm. 1.4]).

**Exercice 3.5.** On note  $M_N := \max\{\tau_k - \tau_{k-1}, \tau_k \leq N\}$  le plus grand “saut” du processus de renouvellement avant  $N$ , c'est-à-dire la taille du plus grand intervalle sans point de contact. Montrer que :

1. Si  $h > h_c$ , il existe une constante  $C_h > 0$  telle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,h}(M_N > C_h \log N) = 0$ .  
*Mieux.* Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $P_{N,h}(|\frac{M_N}{\log N} - \frac{1}{F(h)}| > \varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ .
2. Si  $h < h_c$ , pour toute suite  $C_N \rightarrow \infty$ , on a  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,h}(M_N < N - C_N) = 0$ .

### 3.3 Modèle désordonné, premières propriétés

À partir de maintenant et au vu de la Remarque 3.2, on va supposer pour simplifier quelques énoncés que le renouvellement  $\tau$  est persistant, c'est-à-dire  $P(\tau_1 < +\infty) = 1$ , ce qui implique que le point critique du modèle homogène est  $h_c = 0$ .

#### 3.3.1 Énergie libre

Commençons par définir et démontrer l'existence de l'énergie libre, qui possède une propriété dite d'auto-moyennisation (self-averaging).

**Théorème 3.9.** *L'énergie libre est définie comme la limite*

$$F(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}^{\beta, \omega}. \quad (3.11)$$

*Cette limite existe  $\mathbb{P}$ -p.s. et dans  $L^1(\mathbb{P})$  et est constante  $\mathbb{P}$ -p.s. On a de plus*

$$F(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta, \omega}] = \sup_{N \geq 1} \frac{1}{N} \mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta, \omega}].$$

*Remarque 3.10.* On peut aussi définir l'énergie libre comme dans (3.11), en remplaçant la fonction de partition par sa version *libre*  $\tilde{Z}_{N,h}^{\beta, \omega}$ , voir (3.4). En effet, il suffit de voir que,

en adaptant la démonstration de l'Exercice 3.1, on a

$$Z_{N,h}^{\beta,\omega} \leq \tilde{Z}_{N,h}^{\beta,\omega} \leq (1 + Ce^{-(h+\beta\omega_N)} N^{2+\alpha}) Z_{N,h}^{\beta,\omega},$$

ce qui permet de conclure que  $F(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \tilde{Z}_{N,h}^{\beta,\omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log \tilde{Z}_{N,h}^{\beta,\omega}$ . La dernière identité du Théorème 3.9 n'est cependant pas vérifiée pour  $\tilde{Z}_{N,h}^{\beta,\omega}$ . On a en revanche qu'il existe une constante  $c > 0$  (qui dépend de  $h, \beta$ ) telle que pour tout  $N \geq 1$

$$F(\beta, h) \geq \frac{1}{N} \mathbb{E} [\log \tilde{Z}_{N,h}^{\beta,\omega}] - c \frac{\log N}{N}. \quad (3.12)$$

Avant de montrer le Théorème 3.9, donnons quelques propriétés importantes.

**Proposition 3.11.** *L'énergie libre vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) pour tous  $\beta \geq 0$ ,  $h \in \mathbb{R}$ , on a  $F(\beta, h) \in [0, +\infty[$  ;
- (ii) les fonctions  $h \mapsto F(\beta, h)$  et  $\beta \mapsto F(\beta, h)$  sont convexes et croissantes.
- (iii) la fonction  $(\beta, h) \mapsto F(\beta, h)$  est convexe ;

*Démonstration (de la Proposition 3.11).* Les calculs sont assez similaires à ceux de la Proposition 2.2, mais donnent des estimées utiles.

(i) Pour la borne inférieure, en introduisant l'indicatrice  $\mathbb{1}_{\{\tau_1=N\}}$ , on obtient

$$Z_{N,h}^{\beta,\omega} \geq e^{h+\beta\omega_N} \mathbb{P}(\tau_1 = N).$$

En utilisant la propriété (\*) pour  $\mathbb{P}(\tau_1 = N)$ , on obtient  $F(\beta, h) \geq 0$ . Pour la borne supérieure, en majorant  $(h + \beta\omega_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}$  par  $(h + \beta\omega_i)^+$ , on obtient

$$Z_{N,h}^{\beta,\omega} \leq e^{\sum_{i=1}^N (h+\beta\omega_i)^+} \mathbb{P}(N \in \tau).$$

En utilisant la loi des grands nombres et le fait que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{P}(N \in \tau) = 0$ , voir la Section 3.2.3, on obtient  $F(\beta, h) \leq \mathbb{E}[(h + \beta\omega_1)^+] < +\infty$ .

(ii) Posons, pour  $N \geq 1$ ,

$$F_N^\omega(\beta, h) := \frac{1}{N} \log Z_{N,h}^{\beta,\omega} = \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (h + \beta\omega_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right) \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}} \right].$$

(Notons que  $F_N^\omega(\beta, h)$  dépend de  $\omega$  !) Commençons par montrer que, pour tout  $N \geq 1$  et toute réalisation de  $\omega$ , les fonctions  $h \mapsto F_N^\omega(\beta, h)$  et  $\beta \mapsto F_N^\omega(\beta, h)$  sont convexes.

En dérivant, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial h} F_N^\omega(\beta, h) = \frac{1}{N} \mathbb{E}_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right], \quad \frac{\partial}{\partial \beta} F_N^\omega(\beta, h) = \frac{1}{N} \mathbb{E}_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right], \quad (3.13)$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} F_N^\omega(\beta, h) = \frac{1}{N} \text{Var}_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right], \quad \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} F_N^\omega(\beta, h) = \frac{1}{N} \text{Var}_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right],$$

qui montre la convexité des deux fonctions.

La croissance de  $h \mapsto F_N^\omega(\beta, h)$  se voit directement dans (3.13) (pour tout  $N \geq 1$ , pour tout  $\omega$ ), mais il n'est pas vrai que  $\beta \mapsto F_N^\omega(\beta, h)$  le soit (par exemple si les  $N$  premiers  $\omega$  sont négatifs). Comme l'énergie libre est la limite  $F(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[F_N^\omega(\beta, h)]$ , il suffit de montrer que  $\beta \mapsto \mathbb{E}[F_N^\omega(\beta, h)]$  est croissante : cette fonction étant convexe donc il suffit de montrer que sa dérivée en  $\beta = 0$  est positive ou nulle. Mais comme  $P_{N,h}^{\beta=0,\omega} = P_{N,h}$  ne dépend pas de  $\omega$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \mathbb{E}[F_N^\omega(\beta, h)] \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{N} \mathbb{E} E_{N,h} \left[ \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right] = 0,$$

grâce à l'hypothèse que  $\omega_i = 0$ .

(iii) Pour la convexité de  $(\beta, h) \mapsto F(\beta, h)$ , on va montrer que pour tout  $N \geq 1$  et toute réalisation de  $\omega$ , la fonction  $(\beta, h) \mapsto F_N^\omega(\beta, h)$  est convexe. Les mêmes calculs que précédemment donnent

$$\text{Hess}(F_N^\omega(\beta, h)) = \left( \text{Cov}_{N,h}^{\beta,\omega}(\Sigma_a, \Sigma_b) \right)_{1 \leq a, b \leq 2},$$

avec  $\Sigma_1 = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}$ ,  $\Sigma_2 = \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}$ . Il s'agit d'une matrice définie positive, ce qui montre la convexité voulue.  $\square$

*Remarque 3.12.* La remarque faite dans la Section 2.1.2, voir (2.7), reste valable ici : pour tout  $h$  tel que la dérivée  $\frac{\partial}{\partial h} F(\beta, h)$  existe, cette dérivée est la limite de  $\frac{\partial}{\partial h} F_N^\omega(\beta, h)$  (et de  $\frac{\partial}{\partial h} \mathbb{E}[F_N^\omega(\beta, h)]$ ),

$$\frac{\partial}{\partial h} F(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} E_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right].$$

*Démonstration (du Théorème 3.9).* Une démonstration rapide mais qui utilise une boîte noire consiste à utiliser le théorème sous-additif ergodique de Kingman [Kin73] (que l'on peut voir comme une version aléatoire du lemme de Fekete). Ce théorème est extrêmement utile dans de nombreuses situations, en voici l'énoncé.

On note  $\theta : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'opérateur de translation : si  $\omega = (\omega_i)_{i \geq 1}$ , alors pour  $k \geq 0$

$$\theta^k \omega = (\omega_{i+k})_{i \geq 0},$$

autrement dit  $(\theta^k \omega)_i = \omega_{i+k}$  pour tout  $i \geq 0$ .

**Théorème (sous-additif ergodique).** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions mesurables de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que pour tous  $n, m \geq 1$ , pour tous  $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,

$$X_{n+m}(\omega) \leq X_n(\omega) + X_m(\theta^n \omega).$$

Alors, si  $\omega = (\omega_i)_{i \geq 0}$  de loi  $\mathbb{P}$  sont des variables aléatoires i.i.d.<sup>2</sup>, on a la convergence presque sûre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X_n(\omega) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{E}[X_n] \geq -\infty$   $\mathbb{P}$ -p.s.

On peut appliquer ce théorème à la suite  $-\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}$ , qui vérifie les hypothèses de sous-additivité ergodique : en effet en insérant l'indicatrice  $\mathbb{1}_{\{N \in \tau\}}$ , on obtient

2. Le résultat reste valable sous une hypothèse un peu plus faible d'ergodicité, que tout événement  $\theta$ -invariant est de  $\mathbb{P}$ -probabilité 0 ou 1.



$$Z_{N+M,h}^{\beta,\omega} \geq \mathbb{E} \left[ \exp \left( \left( \sum_{i=1}^N + \sum_{i=N+1}^{N+M} \right) (h + \beta \omega_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right) \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}} \mathbb{1}_{\{N+M \in \tau\}} \right] = Z_{N,h}^{\beta,\omega} Z_{M,h}^{\beta,\theta^N \omega}$$

où on a utilisé la propriété de Markov puis remarqué que  $\sum_{i=N+1}^{N+M} (h + \beta \omega_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} = \sum_{i=1}^M (h + \beta \theta^N \omega_i) \mathbb{1}_{\{N+i \in \tau\}}$ . Cela montre la sur-additivité (ergodique) de  $\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}$  : pour tous  $N, M \geq 1$ ,

$$\log Z_{N+M,h}^{\beta,\omega} \geq \log Z_{N,h}^{\beta,\omega} + \log Z_{M,h}^{\beta,\theta^N \omega}. \quad (3.14)$$

On va démontrer ici l'existence de l'énergie libre par un procédé ad-hoc, qui utilise la sur-additivité de  $\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}$  et la “presque” sous-additivité de  $\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}$  ; en appliquant plusieurs fois la loi des grands nombres.

*Étape 1.* Par sur-additivité (3.14) de  $\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}$ , on obtient la sur-additivité de la suite déterministe  $(\mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}])_{N \geq 1}$ . Par le lemme de Fekete, on obtient donc l'existence (et la caractérisation) de la limite :

$$F := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}] = \sup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}]. \quad (3.15)$$

*Étape 2. Borne inférieure.* On montre maintenant que  $\mathbb{P}$ -p.s.

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}^{\beta,\omega} \geq F, \quad (3.16)$$

où  $F$  est définie dans (3.15).

On se fixe un  $\varepsilon > 0$  et on considère un  $N_0 = N_0(\varepsilon)$  tel que  $\frac{1}{N_0} \mathbb{E}[\log Z_{N_0,h}^{\beta,\omega}] \geq F - \varepsilon$ , par définition de  $F$ . Ensuite, pour  $N \geq 1$ , on écrit  $N = m_N N_0 + q_N$ , où  $0 \leq q_N < N_0$  : en découpant en blocs de taille  $m_N$  et en utilisant la propriété (3.14) de sur-additivité, on obtient

$$\log Z_{N,h}^{\beta,\omega} \geq \sum_{j=0}^{m_N-1} \log Z_{m_N,h}^{\beta,\theta^{jN_0} \omega} + \log Z_{q_N,h}^{\beta,\theta^{m_N N_0} \omega}.$$

On remarque maintenant que les v.a.  $(\log Z_{m_N,h}^{\beta,\theta^{jN_0} \omega})_{j \geq 0}$  sont i.i.d. (car dépendant de blocs de  $\omega_i$  différents) : la loi des grands nombres montre que,  $\mathbb{P}$ -p.s.,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{m_N-1} \log Z_{m_N,h}^{\beta,\theta^{jN_0} \omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_N}{N} \frac{1}{m_N} \sum_{j=0}^{m_N-1} \log Z_{m_N,h}^{\beta,\theta^{jN_0} \omega} = \frac{1}{N_0} \mathbb{E}[\log Z_{N_0,h}^{\beta,\omega}] \geq F - \varepsilon.$$

On peut aussi montrer que le dernier terme  $\log Z_{q_N,h}^{\beta,\theta^{m_N N_0} \omega}$  est négligeable (en exercice) :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \max_{q \in \{0, \dots, N_0-1\}} |\log Z_{q,h}^{\beta,\theta^{m N_0} \omega}| = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

On a donc montré que  $\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}^{\beta,\omega} \geq F - \varepsilon$ , qui donne la borne inférieure voulue car  $\varepsilon > 0$  est arbitraire.

*Étape 3. Borne supérieure.* On montre maintenant que  $\mathbb{P}$ -p.s. on a

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}^{\beta,\omega} \leq F, \quad (3.17)$$

où  $F$  est définie dans (3.15).

On montrera plus bas une propriété de “presque” sous-additivité de  $\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}$ , analogue à (3.14) : il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tous  $N, M \geq 1$ ,

$$\log Z_{N+M,h}^{\beta,\omega} \leq \log Z_{N,h}^{\beta,\omega} + \log Z_{M,h}^{\beta,\theta^N \omega} + \log(1 + Ce^{-(h+\beta\omega_N)} \min(N, M)^{2+\alpha}). \quad (3.18)$$

Pour  $N \geq 1$ , en écrivant  $N = m_N N_0 + q_N$ , où  $0 \leq q_N < N_0$  et en découpant en blocs de taille  $m_N$ , on obtient en appliquant (3.18) de manière répétée

$$\log Z_{N,h}^{\beta,\omega} \leq \sum_{j=0}^{m_N-1} \log Z_{m_N,h}^{\beta,\theta^{jN_0} \omega} + \log Z_{q_N,h}^{\beta,\theta^{m_N N_0} \omega} + \beta \sum_{j=0}^{m_N} |\omega_{jN_0}| + c m_N \log N_0,$$

où on a aussi utilisé que  $\log(1 + Ce^{-(h+\beta\omega_i)} N_0^{2+\alpha}) \leq \beta |\omega_i| + c \log N_0$  (pour  $N_0$  suffisamment grand, qui dépend uniquement de  $h$ ).

Comme précédemment, en appliquant la loi des grands nombres, en négligeant le terme  $\frac{1}{N} \log Z_{q_N,h}^{\beta,\theta^{m_N N_0} \omega}$  (et en notant que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_N}{N} = \frac{1}{N_0}$ ), on obtient pour tout  $N_0$  suffisamment grand

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}^{\beta,\omega} \leq \frac{1}{N_0} \mathbb{E}[\log Z_{N_0,h}^{\beta,\omega}] + \frac{\beta}{N_0} \mathbb{E}[|\omega_1|] + \frac{c}{N_0} \log N_0.$$

On en déduit la borne supérieure voulue en prenant  $N_0 \rightarrow \infty$ , voir aussi la définition (3.15) de  $F$ .

Il reste à montrer la “presque” sous-additivité (3.18). En décomposant suivant le dernier point de renouvellement avant  $N$  et le premier point après  $N$ , on a l'identité

$$Z_{N+M,h}^{\beta,\omega} = Z_{N,h}^{\beta,\omega} Z_{M,h}^{\beta,\theta^N \omega} + \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{b=N+1}^{N+M} Z_{a,h}^{\beta,\omega} K(b-a) e^{h+\beta\omega_b} Z_{N+M-b,h}^{\beta,\theta^b \omega},$$

où le premier terme est dû à l'événement  $\{N \in \tau\}$ . De la même manière, on a les décompositions suivantes :

$$Z_{N,h}^{\beta,\omega} = \sum_{a=0}^{N-1} Z_{a,h}^{\beta,\omega} K(N-a) e^{h+\beta\omega_N}, \quad Z_{M,h}^{\beta,\theta^N \omega} = \sum_{b=N+1}^{N+M} K(b-N) e^{h+\beta\omega_b} Z_{N+M-b,h}^{\beta,\theta^b \omega}.$$

En combinant ces deux identités, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{b=N+1}^{N+M} Z_{a,h}^{\beta,\omega} K(b-a) e^{h+\beta\omega_b} Z_{N+M-b,h}^{\beta,\theta^b \omega} \\ & \leq Z_{N,h}^{\beta,\omega} Z_{M,h}^{\beta,\theta^N \omega} \times e^{-(h+\beta\omega_N)} \max_{0 \leq a < N < b \leq N+M} \frac{K(b-a)}{K(N-a)K(b-N)}, \end{aligned}$$

qui donne l'inégalité (3.18) une fois que l'on aura montré que

$$\max_{0 \leq a < N < b \leq N+M} \frac{K(b-a)}{K(N-a)K(b-N)} \leq C \min(N, M)^{2+\alpha}.$$

Mais cela vient du fait que, grâce à (\*), on a  $\frac{K(b-a)}{K(N-a)} \leq c$  et  $K(b-N) \geq c'M^{-(2+\alpha)}$  uniformément en  $0 \leq a < N < b \leq N+M$ ; de manière symétrique  $\frac{K(b-a)}{K(b-N)} \leq c$  et  $K(N-a) \geq c'N^{-(2+\alpha)}$ .  $\square$

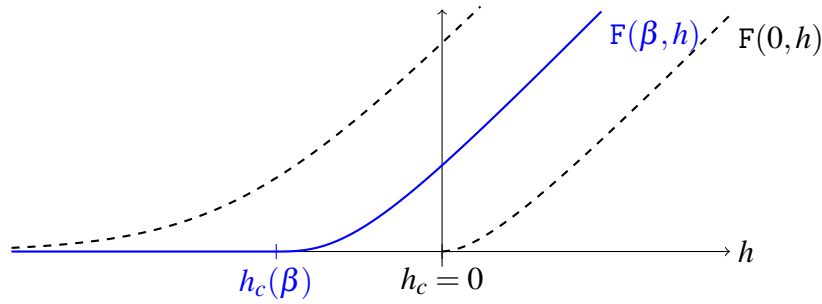
### 3.3.2 Transition de phase

Le fait que  $h \mapsto F(\beta, h)$  soit positive, croissante, convexe montre que l'on peut définir le point critique, pour tout  $\beta > 0$  fixé,

$$h_c(\beta) := \inf\{h, F(\beta, h) > 0\} = \sup\{h, F(\beta, h) = 0\},$$

avec par convention  $\sup \emptyset = -\infty$ .

Par croissance de  $\beta \mapsto F(\beta, h)$ , on a la borne inférieure  $F(\beta, h) \geq F(0, h)$ , donc  $h_c(\beta) \leq h_c(0) = 0$ , voir le Théorème 3.5 (on rappelle que  $P(\tau_1 < +\infty) = 1$ ). On a aussi la borne supérieure  $F(\beta, h) \leq \mathbb{E}[(h + \beta\omega_1)^+]$ , mais qui ne permet pas de déduire quelque chose sur le point critique (car  $\mathbb{E}[(h + \beta\omega_1)^+] > 0$  pour tout  $h \in \mathbb{R}$ , sauf si  $\omega_1$  est à support borné); notons cependant que  $\lim_{h \rightarrow -\infty} \mathbb{E}[(h + \beta\omega_1)^+] = 0$ .



**FIG. 3.3** On a représenté l'énergie libre  $h \mapsto F(\beta, h)$  en fonction de  $h$  (à  $\beta > 0$  fixé) : il s'agit d'une fonction convexe croissante, positive ou nulle. On a aussi représenté les encadrements  $F(\beta, h) \leq \mathbb{E}[(h + \beta\omega_1)^+]$  et  $F(\beta, h) \geq F(0, h)$ .

Au vu de la Remarque 3.12, le point  $h_c(\beta)$  marque une transition de phase entre une phase *localisée* ( $F(\beta, h) > 0$ , densité positive de contacts) et une phase *délocalisée* ( $F(\beta, h) = 0$ , densité nulle de contacts) : on notera  $\mathcal{L}, \mathcal{D}$  les régions correspondantes de l'espace des paramètres  $(\beta, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{L} := \{(\beta, h) ; F(\beta, h) > 0\}, \quad \mathcal{D} := \{(\beta, h) ; F(\beta, h) = 0\}.$$

Notons que comme  $(\beta, h) \mapsto F(\beta, h)$  est convexe, la région délocalisée  $\mathcal{D}$  est convexe, c'est-à-dire la fonction  $\beta \mapsto h_c(\beta)$  est concave.

**Existence d'une transition de phase.** La proposition suivante montre qu'une hypothèse est nécessaire pour vraiment avoir une transition de phase, c'est-à-dire pour avoir  $h_c(\beta) > -\infty$ . Sa démonstration est laissée en exercice, voir l'Exercice 3.6.

**Proposition 3.13.** *Si  $\mathbb{E}(e^{\beta\omega_1}) = +\infty$  pour tout  $\beta > 0$  alors  $F(\beta, h) > 0$  pour tout  $h \in \mathbb{R}$  et tout  $\beta > 0$ . En particulier  $h_c(\beta) = -\infty$  pour tout  $\beta > 0$ .*

Pour avoir une transition de phase, on va donc supposer la chose suivante :

$$\exists \beta_0 \in ]0, +\infty] \text{ tel que } \lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega_i}] < +\infty \quad \forall \beta \in ]0, \beta_0[ . \quad (**)$$

En effet, si  $\lambda(\beta) < +\infty$ , alors en utilisant l'inégalité de Jensen, on a

$$\mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}] \leq \log \mathbb{E}[Z_{N,h}^{\beta,\omega}] = \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (h + \lambda(\beta)) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right) \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}} \right],$$

où on a utilisé le fait que les  $\omega_i$  sont i.i.d. et la définition de  $\lambda(\beta)$ . On reconnaît la fonction de partition homogène de paramètre  $h + \lambda(\beta)$  : on en déduit donc que

$$F(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}] \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h+\lambda(\beta)} = F(0, h + \lambda(\beta)). \quad (3.19)$$

Comme  $F(0, h + \lambda(\beta)) = 0$  pour  $h + \lambda(\beta) \leq h_c = 0$ , cela montre que  $h_c(\beta) \geq -\lambda(\beta)$ .

**Propriétés trajectorielles.** On va maintenant donner quelques propriétés du processus  $\tau$  sous la mesure d'accrochage  $\mathbf{P}_{N,h}^{\beta,\omega}$ , suivant que  $h < h_c(\beta)$  ou  $h > h_c(\beta)$ .

a) *Phase localisée*  $h > h_c(\beta)$ . On a le résultat suivant, dû à [GT06a].

**Théorème.** *L'énergie libre  $F(\beta, h)$  est infiniment dérivable dans la phase localisée  $\mathcal{L} = \{(\beta, h), F(\beta, h) > 0\}$ .*

En particulier, pour tout  $h > h_c(\beta)$ , on a asymptotiquement une densité positive de contacts sous  $\mathbf{P}_{N,h}^{\beta,\omega}$  :

$$\frac{\partial}{\partial h} F(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \mathbb{E}_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right] > 0.$$

où la limite existe  $\mathbb{P}$ -p.s. car  $F$  est dérivable, voir la Remarque 3.12.

L'article [GT06a] montre en outre que les corrélations  $\text{Cov}_{N,h}^{\beta,h}(\mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}, \mathbb{1}_{\{j \in \tau\}})$  décroissent exponentiellement vite. Il en est alors déduit [GT06a, Thm. 2.5] que, si  $M_N$  est la taille de la plus grande excursion du processus de renouvellement, il existe une constante  $C_{\beta,h}$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  on ait  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N,h}^{\beta,\omega} (|\frac{M_N}{\log N} - C_{\beta,h}| > \varepsilon) = 0$ , en  $\mathbb{P}$ -probabilité. Ce résultat est donc comparable à l'Exercice 3.5 dans le cas homogène.

b) *Phase délocalisée*  $h < h_c(\beta)$ . On montre le résultat suivant qui montre qu'il y a très peu de contacts dans la phase délocalisée.

**Proposition 3.14.** *Si  $h < h_c(\beta)$ , alors il existe une constante  $C_h > 0$  telle que*

$$\mathbb{E} \mathbb{E}_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right] \leq \frac{C_h}{h_c(\beta) - h} \log N.$$

*Démonstration.* Par convexité de  $h \mapsto \log Z_{N,h}^{\beta,\omega}$ , en posant  $u = h_c(\beta) - h$ , on a l'inégalité

$$\log Z_{N,h+u}^{\beta,\omega} \geq \log Z_{N,h}^{\beta,\omega} + u \mathbb{E}_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right],$$

où on a utilisé le calcul (3.13) de la dérivée de  $\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}$ . En prenant l'espérance et en utilisant la dernière identité du Théorème 3.9 (due à la sur-additivité), on a

$$\mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}] + u \mathbb{E} E_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right] \leq \mathbb{E}[\log Z_{N,h_c(\beta)}^{\beta,\omega}] \leq F(\beta, h_c(\beta)) = 0.$$

En utilisant la borne inférieure  $Z_{N,h}^{\beta,\omega} \geq e^{\beta \omega_N + h} \mathbb{P}(\tau_1 = N)$ , on obtient l'inégalité

$$u \mathbb{E} E_{N,h}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right] \leq -\beta \mathbb{E}[\omega_N] - h - \log \mathbb{P}(\tau_1 = N) \leq |h| - \log \mathbb{P}(\tau_1 = N)$$

(noter que  $h < h_c(\beta) \leq 0$ ). D'après l'hypothèse (\*) sur  $\mathbb{P}(\tau_1 = N)$ , on a le comportement asymptotique  $\log \mathbb{P}(\tau_1) \sim -(1 + \alpha) \log N$ , ce qui donne l'inégalité voulue.  $\square$

**Exercice 3.6 (Démonstration de la Proposition 3.13).** On définit  $T_0 = 0$ , puis par itération  $T_k := \min\{i > T_{k-1}, \omega_i > 2\frac{|h|}{\beta}\}$ .

1. Montrer que pour tout  $N \geq 1$  on a  $Z_{N,h}^{\beta,\omega} \geq \prod_{i=1}^N K(T_i - T_{i-1}) e^{|h|}$ .
2. Montrer que,  $\mathbb{P}$ -p.s.  $F(\beta, h) \geq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T_N} \log Z_{N,h}^{\beta,\omega} = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{T_N} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}^{\beta,\omega}$ , puis que

$$F(\beta, h) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(T_1)} (|h| + \mathbb{E}(\log K(T_1))).$$

3. En utilisant qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $K(n) \geq cn^{-(2+\alpha)}$  pour tout  $n \geq 1$ , en déduire que

$$\begin{aligned} F(\beta, h) &\geq \frac{1}{\mathbb{E}(T_1)} (|h| - (2 + \alpha) \log \mathbb{E}(T_1) + \log c) \\ &= \mathbb{P}(\omega_1 > 2|h|/\beta) \left( |h| + \log c + (2 + \alpha) \log \mathbb{P}(\omega_1 > 2|h|/\beta) \right). \end{aligned}$$

4. Montrer que si  $\mathbb{E}(e^{\beta \omega_1}) = +\infty$  pour tout  $\beta > 0$  alors  $\liminf_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \mathbb{P}(\omega_1 > t) = 0$ . En déduire que pour tout  $A < 0$  il existe un  $h < A$  tel que

$$F(\beta, h) \geq \frac{1}{2} |h| \mathbb{P}(\omega_1 > 2|h|/\beta) > 0.$$

**Exercice 3.7.** On reprend l'exercice précédent en considérant maintenant le cas particulier où  $\mathbb{P}(\omega_1 > t) \sim t^{-\gamma}$  pour un certain  $\gamma > 1$ . Étudions le comportement de  $F(\beta, h)$  quand  $h \rightarrow -\infty$  (avec  $\beta > 0$  fixé). On suppose dans la suite que l'on a  $h < 0$ . Changeons la définition des  $T_k$  : on définit  $T_0 = 0$  et pour  $k \geq 1$   $T_k := \min\{i > T_{k-1}, i > t\}$ , où on a posé  $t := \frac{|h|}{\beta}$ .

1. En adaptant les étapes 1.-2. de l'exercice précédent, montrer que

$$F(\beta, h) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(T_1)} \left( \mathbb{E}(\beta \omega_1 + h \mid \omega_1 > t) + \mathbb{E}(\log K(T_1)) \right).$$

(On pourra noter que  $\omega_{T_1}$  a la loi de  $\omega_1$  conditionnée à  $\omega_1 > t$ .) En déduire que

$$F(\beta, h) \geq \beta \mathbb{E}((\omega_1 - t) \mathbb{1}_{\{\omega_1 > t\}}) + \mathbb{P}(\omega_1 > t) \mathbb{E}(\log K(T_1)).$$

2. Montrer que  $\mathbb{E}((\omega_1 - t) \mathbb{1}_{\{\omega_1 > t\}}) \sim \frac{1}{\gamma-1} t^{1-\gamma}$  quand  $t \rightarrow \infty$ . En déduire que

$$F(\beta, h) \geq (1 - o(1)) \frac{\beta}{\gamma-1} t^{1-\gamma} = (1 - o(1)) \frac{\beta^\gamma}{\gamma-1} |h|^{1-\gamma}, \quad h \rightarrow -\infty.$$

3. Montrer que l'on a  $F(\beta, h) \leq \mathbb{E}((\beta \omega_1 + h)^+) = \beta \mathbb{E}((\omega_1 - t) \mathbb{1}_{\{\omega_1 > t\}})$ . Conclure que

$$F(\beta, h) \sim \frac{\beta^\gamma}{\gamma-1} |h|^{1-\gamma}, \quad \text{quand } h \rightarrow -\infty.$$

### 3.4 Quelques propriétés du diagramme de phase

On va montrer dans cette section quelques bornes (inférieures et supérieures) sur la courbe critique  $h_c(\beta)$ . On va supposer dans toute la suite que l'on a la condition (\*\*): cela implique notamment que l'on a  $\mathbb{E}[\omega_1^2] < +\infty$ .

#### 3.4.1 Le désordre facilite l'accrochage

Le théorème suivant montre notamment que  $h_c(\beta) < 0$  pour tout  $\beta > 0$ . On interprète cela comme le fait que le désordre abaisse le point critique : pour  $h_c(\beta) < h < 0$ , même si  $h + \beta \omega_i$  est en moyenne strictement négatif (donc répulsif), on a quand même localisation !

**Théorème 3.15.** *Supposons que  $\mathbb{E}[\omega_1] = 0$ ,  $\mathbb{E}[\omega_1^2] = 1$  et aussi que  $K(1), K(2) > 0$ . Alors pour tout  $\beta > 0$ , on a  $h_c(\beta) < 0$ . Plus précisément, il existe une constante  $c$  telle que pour tout  $\beta > 0$ ,*

$$h_c(\beta) \leq -c \mathbb{E}[\log(pe^{\beta \omega_1} + 1 - p)], \quad \text{avec } p := \mathbb{P}(1 \in \tau \mid 2 \in \tau) \in ]0, 1[.$$

Soulignons d'emblée que d'après l'inégalité de Jensen, on a  $\log(pe^{\beta \omega_1} + 1 - p) > p\beta \omega_1$  si  $\omega_1 \neq 0$ , l'inégalité étant stricte car  $p \in ]0, 1[$  et  $e^{\beta \omega_1} \neq 1$ . Cela montre que la borne supérieure est strictement négative pour tout  $\beta > 1$ . On peut de même obtenir des estimées sur cette borne supérieure quand  $\beta \downarrow 0$  ou  $\beta \uparrow +\infty$  (laissées en exercice) :

$$\mathbb{E}[\log(pe^{\beta \omega_1} + 1 - p)] \sim \begin{cases} \frac{1}{2} p \mathbb{E}[\omega_1^2] \beta^2 & \text{quand } \beta \downarrow 0, \\ \beta \mathbb{E}[\omega_1^+] & \text{quand } \beta \uparrow +\infty. \end{cases}$$

*Démonstration.* La démonstration est présentée dans livre [Gia07] et dans les notes de cours d'Hubert Lacoïn. L'idée essentielle est de considérer des “paires de points” de renouvellement et d'observer qu'entre ces points de renouvellement, le désordre effectif est de moyenne strictement positive.

On considère  $N$  pair et pour une réalisation de  $\tau$  donné, on note

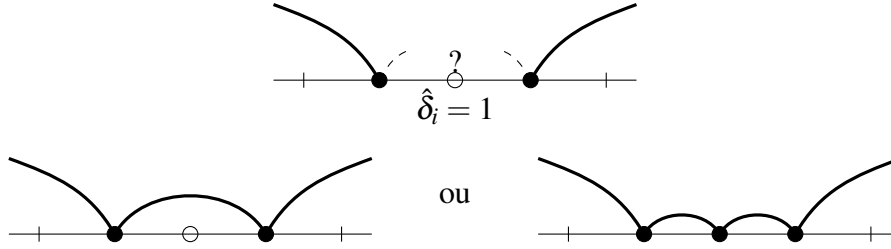
$$\mathcal{I}_N = \mathcal{I}_N(\tau) := \{n \in \{1, \dots, N-1\} \text{ impair}, n-1 \in \tau \text{ et } n+1 \in \tau\},$$

qui correspond aux “paires de points” mentionnées ci-dessus, et on notera  $\hat{\delta}_i := \mathbb{1}_{\{i \in \mathcal{I}_N\}}$ .

Pour  $\beta, h$  fixés, on définit le *désordre effectif* suivant

$$\hat{\omega}_i = \hat{\omega}_i(\beta, h) := \log \mathbb{E} \left[ e^{(h+\beta\omega_i)\mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}} \mid \hat{\delta}_i = 1 \right] = \log (pe^{h+\beta\omega_i} + 1 - p),$$

où  $p := \mathbb{P}(1 \in \tau \mid 2 \in \tau) = \frac{K(1)^2}{K(1)^2 + K(2)}$ , voir la Figure 3.4. Notons que les  $(\hat{\omega}_i)_{i \geq 1}$  sont i.i.d. et que l'on a  $\mathbb{E}[\hat{\omega}_1] > ph$  grâce à l'inégalité de Jensen (l'inégalité est stricte car  $h + \beta\omega_i$  n'est pas concentré en 0).



**FIG. 3.4** Conditionnellement à avoir  $i \in \mathcal{I}_N$ , le renouvellement peut soit visiter le point  $i$  (c'est-à-dire  $\hat{\delta}_i = 1$ , avec probabilité  $p$ ) et récupérer  $e^{h+\beta\omega_i}$ , soit ne pas visiter le point  $i$  (c'est-à-dire  $\hat{\delta}_i = 0$ , avec probabilité  $1 - p$ ) et ne rien récupérer.

**Lemme 3.16.** *Pour tout  $N$  pair, on a*

$$Z_{N,h}^{\beta,\omega} = \mathbb{E} \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (h + \beta\omega_i)(1 - \hat{\delta}_i)\mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} + \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i \hat{\delta}_i \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right) \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}} \right].$$

*Démonstration.* Introduisons aussi l'ensemble  $\mathcal{J}_N := \{i \in \{0, \dots, N\}, i \in \tau, \hat{\delta}_i = 0\}$ . En conditionnant par  $\mathcal{J}_N, \mathcal{I}_N$ , on obtient

$$\mathbb{E} \left[ e^{\sum_{i=1}^N (h+\beta\omega_i)\mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}} \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}} \mid \mathcal{I}_N, \mathcal{J}_N \right] = e^{\sum_{i \in \mathcal{J}_N} (h+\beta\omega_i)} \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}} \mathbb{E} \left[ e^{\sum_{i \in \mathcal{I}_N} (h+\beta\omega_i)} \mid \mathcal{I}_N, \mathcal{T}_N \right].$$

Ensuite, on observe que, conditionnellement à  $\mathcal{I}_N$  (et  $\mathcal{J}_N$ ), les variables aléatoires  $(\mathbb{1}_{\{i \in \tau\}})_{i \in \mathcal{I}_N}$  sont indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre  $p$  (voir la Figure 3.4). Ainsi, on obtient

$$\mathbb{E} \left[ e^{\sum_{i \in \mathcal{I}_N} (h+\beta\omega_i)\mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}} \mid \mathcal{I}_N, \mathcal{J}_N \right] = \prod_{i \in \mathcal{I}_N} (pe^{h+\beta\omega_i} + 1 - p) = e^{\sum_{i \in \mathcal{I}_N} \hat{\omega}_i}.$$

L'espérance conditionnelle vaut donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e^{\sum_{i=1}^N (h+\beta\omega_i)\mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}} \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}} \mid \mathcal{I}_N, \mathcal{J}_N \right] &= e^{\sum_{i \in \mathcal{J}_N} (h+\beta\omega_i) + \sum_{i \in \mathcal{I}_N} \hat{\omega}_i} \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}} \\ &= \exp \left( \sum_{i=1}^N (h + \beta\omega_i)(1 - \hat{\delta}_i)\mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} + \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i \hat{\delta}_i \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right) \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}}. \end{aligned}$$

En reprenant l'espérance, on obtient la conclusion du lemme.  $\square$

Pour conclure la démonstration du théorème, on utilise la sur-additivité de  $\mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}]$ . Comme  $F(\beta, h) = \sup_{N \geq 1} \frac{1}{N} \mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}]$  d'après le Théorème 3.9, on a le critère de

volume fini :

$$F(\beta, h) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{il existe un } N \text{ tel que } \mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}] > 0. \quad (3.20)$$

Pour obtenir une borne inférieure sur  $Z_{N,h}^{\beta,\omega}$ , on applique l'inégalité de Jensen à la probabilité conditionnelle  $P(\cdot \mid N \in \tau)$  : avec le Lemme 3.16, on obtient

$$Z_{N,h}^{\beta,\omega} \geq P(N \in \tau) \exp \left( \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N (h + \beta \omega_i) (1 - \hat{\delta}_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} + \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i \hat{\delta}_i \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \mid N \in \tau \right] \right).$$

En prenant le log puis l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}] \geq \log P(N \in \tau) + h \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N (1 - \hat{\delta}_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \mid N \in \tau \right] + \mathbb{E}[\hat{\omega}_i] \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N \hat{\delta}_i \mid N \in \tau \right].$$

Il reste donc à estimer les différents termes, mais avant cela, faisons quelques observations. Tout d'abord, on se concentre sur le cas  $h \leq 0$  (car sinon on a la borne inférieure  $F(\beta, h) \geq F(0, h)$ ). Ainsi, dans le deuxième terme on peut majorer  $1 - \hat{\delta}_i \leq 1$ . De même, d'après la définition de  $\hat{\omega}_i$ , on a  $\hat{\omega}_i = h + \log(pe^{\beta \omega_1} + (1-p)e^{-h}) \geq h + \log(pe^{\beta \omega_1} + 1 - p)$ . On en conclut que

$$\mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}] \geq \log P(N \in \tau) + h(U_N + \hat{U}_N) + \mathbb{E}[\log(pe^{\beta \omega_1} + 1 - p)] \hat{U}_N,$$

où  $U_N = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \mid N \in \tau \right]$  et  $\hat{U}_N = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N \hat{\delta}_i \mid N \in \tau \right]$ . En utilisant les résultats de la Section 3.2.3, voir notamment (3.9), on obtient (exercice, on laisse de côté les cas  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 0$  pour simplifier) :

$$U_N = \sum_{i=1}^N \frac{P(i \in \tau) P(N-i \in \tau)}{P(N \in \tau)} \sim \begin{cases} N/\mathbb{E}[\tau_1] & \text{si } \mathbb{E}[\tau_1] < +\infty \\ c_\alpha L(N) N^\alpha & \text{si } \alpha \in ]0, 1[ , \end{cases}$$

et

$$\hat{U}_N = \sum_{i=1}^N \frac{P(i-1 \in \tau) P(2 \in \tau) P(N-i-1 \in \tau)}{P(N \in \tau)} \sim P(2 \in \tau) U_N.$$

On en conclut que

$$\mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}] \geq \log P(N \in \tau) + (1 + o(1)) \left( (1 + p')h + p' \mathbb{E}[\log(pe^{\beta \omega_1} + 1 - p)] \right) U_N,$$

avec  $p' = P(2 \in \tau)$ . Comme  $\log P(N \in \tau) = o(U_N)$ , cela montre que, pourvu que  $h > -\frac{p'}{1+p'} \mathbb{E}[\log(pe^{\beta \omega_1} + 1 - p)]$ , on a  $\mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}] > 0$  pour  $N$  suffisamment grand, ce qui implique que  $F(\beta, h) > 0$ . Cela donne la borne voulue.  $\square$

### 3.4.2 Comparaison avec le modèle annealed

Rappelons qu'avec l'hypothèse (\*\*), on a la borne supérieure (3.19), due à l'inégalité de Jensen :

$$F(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}[\log Z_{N,h}^{\beta,\omega}] \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}[Z_{N,h}^{\beta,\omega}] = F(0, h + \lambda(\beta)).$$



La fonction de partition moyennée  $\mathbb{E}[Z_{N,h}^{\beta,h}]$  (ici égale à  $Z_{N,h+\lambda(\beta)}$ ) est appelée fonction de partition *recuite* (*annealed* en anglais) : elle correspond à prendre l'espérance du poids de Gibbs à la fois sur le processus de renouvellement et sur le désordre.

*Remarque 3.17.* On peut considérer la mesure de Gibbs associée à la fonction de partition annealed : il s'agit d'une mesure à la fois sur le renouvellement  $\tau$  et le désordre  $\omega$ , avec pour mesure de référence  $P \otimes \mathbb{P}$ ,

$$\frac{dP_{N,h}^{\beta,\text{ann}}}{dP \otimes \mathbb{P}}(\tau, \omega) = \frac{1}{Z_{N,h}^{\beta,\text{ann}}} \exp \left( \sum_{i=1}^N (h + \beta \omega_i) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}} \right) \mathbb{1}_{\{N \in \tau\}},$$

avec  $Z_{N,h}^{\beta,\text{ann}} := \mathbb{E}[Z_{N,h}^{\beta,h}]$ .

Ainsi, on appellera énergie libre *annealed* la limite  $F^{\text{ann}}(\beta, h) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}[Z_{N,h}^{\beta,\omega}] = F(0, h + \lambda(\beta))$  et on notera  $h_c^{\text{ann}}(\beta) = -\lambda(\beta)$  le point critique annealed correspondant. Noter que l'on a la borne inférieure  $h_c(\beta) \geq h_c^{\text{ann}}(\beta) = -\lambda(\beta)$  et qu'on obtient facilement que  $\lambda(\beta) \sim \frac{1}{2} \mathbb{E}[\omega_1^2] \beta^2$  quand  $\beta \downarrow 0$ .

Si l'on suppose que dans dans (\*\*), on a

$$\beta_0 := \sup \{ \beta \geq 0, \lambda(\beta) < +\infty \},$$

alors il est clair que l'on a la dichotomie suivante :

- (i) Si  $\beta < \beta_0$ , alors  $h_c^{\text{ann}}(\beta) > -\infty$ ;
- (ii) Si  $\beta > \beta_0$ , alors  $h_c^{\text{ann}}(\beta) = -\infty$  (en réalité,  $F^{\text{ann}}(\beta, h) = +\infty$  pour tout  $h \in \mathbb{R}$ ).

On retrouve cette dichotomie, avec un critère légèrement différent, pour le modèle quenched.

**Théorème 3.18.** *Supposons que Alors on a la dichotomie suivante :*

- (i) Si  $\beta < (1 + \alpha)\beta_0$ , alors  $h_c(\beta) > -\infty$ ;
- (ii) Si  $\beta > (1 + \alpha)\beta_0$ , alors  $h_c(\beta) = -\infty$ .

*Démonstration (Sous forme d'exercice).* (i) On se fixe  $\beta < (1 + \alpha)\beta_0$  et on veut montrer que  $F(\beta, h) = 0$  pour  $h$  suffisamment négatif.

Soit  $\gamma$  un réel tel que  $\frac{1}{1+\alpha} < \gamma < \frac{(1+\alpha)\beta_0}{\beta}$ ; noter que  $\gamma \in ]0, 1]$ .

1. Montrer que  $F(\beta, h) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma N} \log \mathbb{E}[(Z_{N,h}^{\beta,\omega})^\gamma]$ .
2. En utilisant le fait que pour tout ensemble de réels positifs  $a_i \geq 0$  on a  $(\sum a_i)^\gamma \leq \sum (a_i)^\gamma$  si  $\gamma \in (0, 1]$ , montrer que

$$(Z_{N,h}^{\beta,\omega})^\gamma \leq \sum_{k=1}^N \sum_{t_0=0 < t_1 < \dots < t_k=N} \prod_{i=1}^k K(t_i - t_{i-1})^\gamma e^{\gamma h + \gamma \beta \omega_{t_i}}.$$

3. En introduisant  $c_\gamma := \sum_{n=1}^\infty K(n)^\gamma < +\infty$  (car  $\gamma(1 + \alpha) > 1$ ), en déduire que

$$\mathbb{E}[(Z_{N,h}^{\beta,\omega})^\gamma] \leq \sum_{k=1}^N \sum_{t_0=0 < t_1 < \dots < t_k=N} \prod_{i=1}^k \hat{K}(t_i - t_{i-1}) e^{\gamma h + \lambda(\gamma \beta) - \log c_\gamma},$$

où  $\hat{K}(\cdot)$  vérifie  $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}(n) = 1$ .

4. En déduire que  $F(\beta, h) \leq \frac{1}{\gamma} \hat{F}(\gamma h + \gamma \lambda(\beta) - \log c_\gamma)$ , où  $\hat{F}$  est l'énergie libre d'un modèle d'accrochage homogène avec un renouvellement sous-jacent de loi inter-arrivée  $\hat{K}(\cdot)$ , qui vérifie aussi la condition (\*).

Conclure.

(ii) Soit  $\beta > (1 + \alpha)\beta_0$ ; on se fixe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\beta > (1 + \alpha + \varepsilon)\beta_0$ . On reprend la trame de l'Exercice 3.6 (et de l'Exercice 3.7) pour montrer que l'on a  $F(\beta, h) > 0$  pour tout  $h \in \mathbb{R}$ . On fixe  $A = A(\beta, h)$  (à choisir plus tard) et on définit  $T_0 = 0$  et par itération  $T_k := \min\{i > T_{k-1}, \omega_i \geq A\}$ .

1. En reprenant les questions 1.-2.-3. de l'Exercice 3.7, et en utilisant qu'il existe une constante  $c_\varepsilon > 0$  telle que  $K(n) \geq c_\varepsilon n^{-(1+\alpha+\varepsilon)}$  pour tout  $n \geq 1$ , montrer que

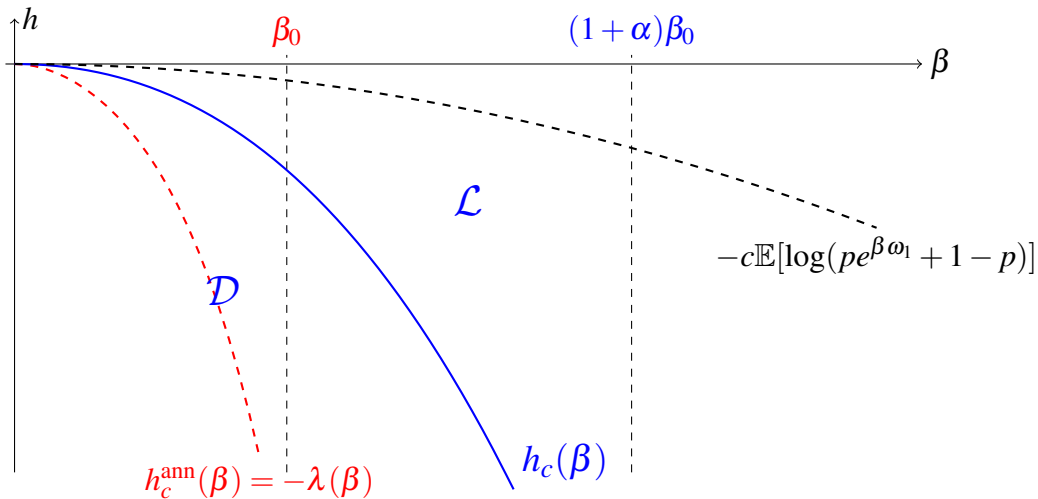
$$F(\beta, h) \geq P(\omega_1 \geq A) \left( h + \beta A + \log c_\varepsilon + (1 + \alpha + \varepsilon) \log P(\omega_1 \geq A) \right).$$

2. Montrer que quand  $A \rightarrow \infty$ , on a  $\log P(\omega_1 \geq A) \sim -\beta_0 A$ .

En déduire que pour tout  $h \in \mathbb{R}$ , on peut choisir  $A = A(\beta, h) > 0$  tel que  $F(\beta, h) > 0$ , puis conclure.  $\square$

*Remarque 3.19.* La question de savoir si  $h_c(\beta) < -\infty$  ou  $h_c(\beta) = -\infty$  à  $\beta = (1 + \alpha)\beta_0$  est ouverte et devrait dépendre de manière plus fine des lois de  $\tau$  et de  $\omega$ . On peut cependant montrer (exercice ?) que si  $\lambda(\beta_0) = +\infty$ , alors on a  $h_c((1 + \alpha)\beta_0) = -\infty$ ; mais la réciproque est fausse.

### 3.4.3 Résumé du diagramme de phase



**FIG. 3.5** Diagramme de phase : la courbe critique  $\beta \mapsto h_c(\beta)$  est concave et sépare la phase localisée  $\mathcal{L}$  (c'est-à-dire  $h > h_c(\beta)$ ) de la phase délocalisée  $\mathcal{D}$  (c'est-à-dire  $h \leq h_c(\beta)$ ). On a aussi résumé les bornes obtenues : on a  $-\lambda(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta) \leq h_c(\beta) \leq -c\mathbb{E}[\log(pe^{\beta\omega} + 1 - p)]$ ; noter que les bornes inférieures et supérieures sont toutes les deux de l'ordre de  $\beta^2$  quand  $\beta \downarrow 0$ . Aussi,  $-\lambda(\beta)$  “explose” en  $\beta_0$  alors que  $h_c(\beta)$  “explose” en  $(1 + \alpha)\beta_0$ .

## Chapitre 4

# Pertinence vs. non-pertinence du désordre pour le modèle d'accrochage

La question de l'influence du désordre est un problème général pour des systèmes physiques : il s'agit de savoir si les caractéristiques du système (notamment les propriétés de la transition de phase) sont impactées par la présence d'inhomogénéités. Autrement dit, il s'agit de savoir si le système est "stable" lorsque l'on introduit du désordre.

Ce chapitre s'intéresse à cette question dans le cadre du modèle d'accrochage, pour lequel une réponse (presque) complète a été apportée ces dernières années.

## 4.1 Préliminaires sur la pertinence/non-pertinence du désordre

On souhaite donc répondre à la question suivante : le modèle d'accrochage désordonné possède-t-il des caractéristiques différentes du modèle homogène (ou annealed) ?

### 4.1.1 Pertinence vs. non-pertinence du désordre et critère de Harris

Considérons un système physique homogène, en dimension  $d \geq 1$  (disons sur  $\mathbb{Z}^d$ ), muni d'un paramètre  $h$  qui peut varier (la température, un champ extérieur, etc.) et supposons que le système traverse une transition de phase lorsque le paramètre  $h$  varie. On se pose alors la question de l'influence du désordre sur cette transition de phase, dans les termes suivants. Soit  $(\omega_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  des variables aléatoires i.i.d. centrées réduites et soit  $\beta > 0$  un paramètre réglant l'intensité du désordre. On considère alors le système précédent perturbé par le désordre  $(\omega_x)$  en modifiant localement le paramètre  $h$  : au site  $x$ , le paramètre est maintenant  $h + \beta \omega_x$ .

La première question à se poser est de savoir si le modèle désordonné possède toujours une transition de phase (ce qui n'est pas nécessairement le cas, comme on l'a vu). Si une transition de phase a lieu, à un point critique  $h_c(\beta)$ , on peut alors comparer les caractéristiques de la transition de phase du modèle désordonné (quenched) et celles du modèle annealed (qui est le modèle naturel auquel comparer le modèle quenched). On se pose alors la question de la pertinence vs. non-pertinence du désordre :

- Si pour une intensité de désordre suffisamment faible le modèle quenched a des propriétés critiques proches de celles du modèle annealed, on dit que le désordre est *non-pertinent* (irrelevant disorder) ;
- Si, quelle que soit l'intensité du désordre, le modèle quenched a des propriétés critiques différentes de celles du modèle annealed, on dit que le désordre est *pertinent* (relevant disorder).

On peut se poser la question de la pertinence du désordre en termes de points critiques ou en termes de comportement critique de l'énergie libre. Reformulons la pertinence/non-

pertinence du désordre sous cet angle (dans le cadre du modèle d'accrochage pour simplifier) :

- S'il existe  $\beta_1 > 0$  tel que pour tout  $\beta \in ]0, \beta_1[$  on ait

$$h_c(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta) \quad \text{et} \quad F(\beta, h_c(\beta) + u) \approx F^{\text{ann}}(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u) \quad \text{quand } u \downarrow 0,$$

alors le désordre est dit *non-pertinent*.

- Si pour tout  $\beta > 0$  on a

$$h_c(\beta) \neq h_c^{\text{ann}}(\beta) \quad \text{ou} \quad F(\beta, h_c(\beta) + u) \not\approx F^{\text{ann}}(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u) \quad \text{quand } u \downarrow 0,$$

alors le désordre est dit *pertinent*.

*Critère général de Harris.* Le physicien A.B. Harris donna dans son article [Har74] des prédictions générales pour déterminer si le désordre est pertinent ou non. La prédiction est basée sur l'exposant critique du modèle homogène : si la *longueur de corrélation*<sup>1</sup>  $\xi = \xi(h)$  du modèle homogène possède un exposant critique  $\nu$ , c'est-à-dire si on a  $\xi(h_c + u) \sim u^{-\nu}$  quand  $u \downarrow 0$ , alors Harris prédit que l'on devrait avoir

$$\begin{aligned} &\text{non-pertinence du désordre si } \nu > 2/d, \\ &\text{pertinence du désordre si } \nu < 2/d. \end{aligned}$$

Il s'agit de ce qui est désormais appelé *critère de Harris*. Noter que le cas  $\nu = 2/d$ , appelé *marginal*, n'est pas inclus dans la prédiction ; en pratique, il dépend des détails du modèle considéré.

*Critère de Harris, cas du modèle d'accrochage.* Dans le cadre du modèle d'accrochage, on est dans le cadre d'un système de dimension  $d = 1$ . De plus, il a été montré dans [?] que pour le modèle homogène on a la relation suivante entre la longueur de corrélation et l'énergie libre :  $\xi(h) = 1/F(h)$ . Ainsi, au vu du Théorème 3.5, l'exposant critique de la longueur de corrélation est  $\nu := \max(\frac{1}{\alpha}, 1)$ . Le critère de Harris donne donc la prédiction suivante pour le modèle d'accrochage :

$$\begin{aligned} &\text{non-pertinence du désordre si } \alpha < 1/2, \\ &\text{pertinence du désordre si } \alpha > 1/2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ces dernières années, le modèle d'accrochage a servi de banc d'essai au critère de Harris, notamment car il possédait les avantages : (i) d'être un modèle de dimension  $d = 1$  dont la version homogène est très bien comprise ; (ii) d'avoir une classe de modèles dépendant d'un paramètre  $\alpha$  (voir (\*)) permettant de couvrir tout le spectre du critère de Harris, dont le cas marginal  $\alpha = \frac{1}{2}$  (qui contient notamment le modèle d'accrochage de la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$ ).

La prédiction (4.1) a maintenant été complètement démontrée dans le cadre du modèle d'accrochage, le cas marginal  $\alpha = 1/2$  ayant aussi été traité. Le but de ce chapitre est essentiellement de montrer le critère (4.1).

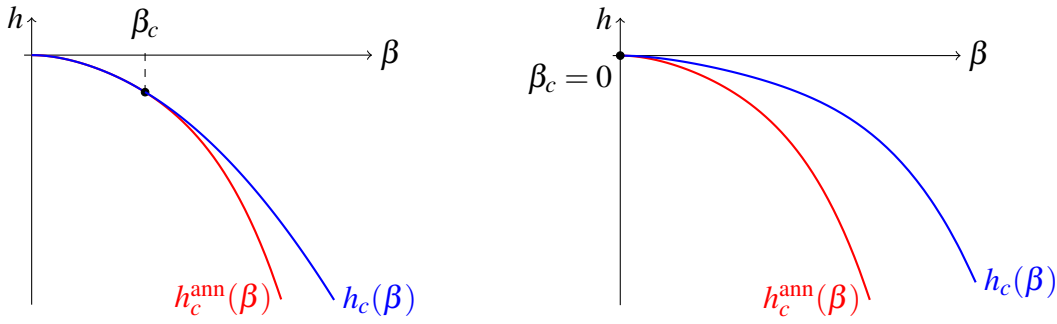
1. Je ne donnerai pas ici de définition précise, mais il s'agit de la longueur où les corrélations entre les observables du modèle se font sentir. De manière plus ou moins formelle,  $\xi(h) = \lim_{\|x-x'\| \rightarrow \infty} -\log |\text{Cov}_h(\delta_x, \delta_{x'})|$ , c'est-à-dire  $|\text{Cov}_h(\delta_x, \delta_{x'})| \approx \exp(-\|x-x'\|/\xi(h))$ .

### 4.1.2 Monotonie de la pertinence

Avant de traiter le cas de la pertinence/non-pertinence du désordre, notons que le désordre est pertinent si et seulement si  $h_c(\beta) > h_c^{\text{ann}}(\beta)$  pour tout  $\beta \geq 0$ ; rappelons que l'on a montré l'inégalité  $h_c(\beta) \geq h_c^{\text{ann}}(\beta)$ . La proposition suivante montre que l'écart entre les points critiques quenched et annealed est monotone en  $\beta$ .

**Proposition 4.1.** *La fonction  $\beta \mapsto h_c(\beta) - h_c^{\text{ann}}(\beta)$  est croissante.*

En particulier, il existe un  $\beta_c = \inf\{\beta, h_c(\beta) > h_c^{\text{ann}}(\beta)\} \geq 0$  tel que les points critiques sont égaux pour tout  $\beta \leq \beta_c$  et différents pour tout  $\beta > \beta_c$ . On peut voir cela comme une autre transition de phase, appelée transition de *faible désordre* ( $\beta < \beta_c$ ) à *fort désordre* ( $\beta > \beta_c$ ). Ainsi, la pertinence du désordre revient simplement à dire que l'on a  $\beta_c = 0$ ; autrement dit, on est dans la phase de fort désordre pour tout  $\beta > 0$ .



**FIG. 4.1** La croissance de  $\beta \mapsto h_c(\beta) - h_c^{\text{ann}}(\beta)$  montre l'égalité des points critiques jusqu'à un certain  $\beta_c$  : si  $\beta_c > 0$  (à gauche) le désordre est non-pertinent; si  $\beta_c = 0$  (à droite) le désordre est pertinent.

*Démonstration.* Pour démontrer la Proposition 4.1, il nous suffit de montrer que, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\beta \mapsto F(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u)$  est décroissante. En effet, par définition du point critique  $h_c(\beta)$  on a

$$h_c(\beta) - h_c^{\text{ann}}(\beta) = \inf \{u; F(\beta, h_c^{\text{ann}} + u) > 0\},$$

qui sera alors croissante.

Rappelons que  $h_c^{\text{ann}}(\beta) = -\lambda(\beta)$  avec  $\lambda(\beta) = \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega_1}]$ . Il nous suffit donc de montrer que, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $u \in \mathbb{R}$ , la fonction

$$f_N : \beta \mapsto \mathbb{E}[\log Z_{N, u - \lambda(\beta)}^{\beta, \omega}], \quad Z_{N, u - \lambda(\beta)}^{\beta, \omega} = \mathbb{E} \left[ e^{\sum_{i=1}^N (u + \beta \omega_i - \lambda(\beta)) \delta_i} \delta_N \right]$$

est décroissante (on a posé  $\delta_i = \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}$ ). En dérivant par rapport à  $\beta$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_N}{\partial \beta} &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{Z_{N, u - \lambda(\beta)}^{\beta, \omega}} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^N (\omega_i - \lambda'(\beta)) \delta_i \right) e^{\sum_{i=1}^N (u + \beta \omega_i - \lambda(\beta)) \delta_i} \delta_N \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{u \sum_{i=1}^N \delta_i} \delta_N \mathbb{E} \left[ \frac{1}{Z_{N, u - \lambda(\beta)}^{\beta, \omega}} \left( \sum_{i=1}^N (\omega_i - \lambda'(\beta)) \delta_i \right) e^{\sum_{i=1}^N (\beta \omega_i - \lambda(\beta)) \delta_i} \right] \right]. \end{aligned}$$

On va montrer que, pour toute réalisation de  $\tau$ , c'est-à-dire pour tout  $(\delta_i)_{1 \leq i \leq N} \in \{0, 1\}^N$  fixé, on a

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{Z_{N,u-\lambda(\beta)}^{\beta,\omega}} \left( \sum_{i=1}^N (\omega_i - \lambda'(\beta)) \delta_i \right) e^{\sum_{i=1}^N (\beta \omega_i - \lambda(\beta)) \delta_i} \right] \leq 0. \quad (4.2)$$

Pour cela, on remarque que  $e^{\sum_{i=1}^N (\beta \omega_i - \lambda(\beta)) \delta_i}$  est positive et d'espérance 1 (par rapport à  $\mathbb{E}$ ) : on peut donc l'interpréter comme une densité de probabilité. Ainsi, pour  $\tau$  fixé, on définit la mesure de probabilité  $\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau$  par sa dérivée de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau}{d\mathbb{P}}(\omega) = \prod_{i=1}^N e^{(\beta \omega_i - \lambda(\beta)) \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}}. \quad (4.3)$$

Il s'agit d'une mesure produit : sous  $\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau$  les  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont indépendantes, de loi  $\mathbb{P}$  si  $i \notin \tau$  et de loi  $\mathbb{P}_\beta$  si  $i \in \tau$ , où  $\mathbb{P}_\beta$  est la loi de  $\omega$  *tiltée* de  $\beta$ , c'est-à-dire

$$\frac{d\mathbb{P}_\beta}{d\mathbb{P}}(\omega_i) = e^{\beta \omega_i - \lambda(\beta)} = \frac{e^{\beta \omega_i}}{\mathbb{E}[e^{\beta \omega_i}]}. \quad (4.4)$$

On peut donc réécrire le terme de gauche de (4.2) sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}_{N,\beta}^\tau \left[ \frac{1}{Z_{N,u-\lambda(\beta)}^{\beta,\omega}} \left( \sum_{i=1}^N (\omega_i - \lambda'(\beta)) \delta_i \right) \right].$$

On utilise alors l'inégalité de Harris ci-dessous, aussi appelée inégalité FKG (pour Fortuin–Kasteleyn–Ginibre, dans un cadre plus général).

**Théorème (Inégalité de Harris–FKG).** Soient  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  des variables aléatoires réelles indépendantes (pas nécessairement de même loi) et soient  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions croissantes (c'est-à-dire croissantes coordonnées par coordonnées). Alors on a

$$\mathbb{E}[f(\omega_1, \dots, \omega_n)g(\omega_1, \dots, \omega_n)] \geq \mathbb{E}[f(\omega_1, \dots, \omega_n)]\mathbb{E}[g(\omega_1, \dots, \omega_n)].$$

Notons que pour tout  $\beta \geq 0$ , les fonctions

$$\begin{aligned} (\omega_1, \dots, \omega_N) &\mapsto Z_{N,u-\lambda(\beta)}^{\beta,\omega} = \mathbb{E} \left[ e^{\sum_{i=1}^N (u + \beta \omega_i - \lambda(\beta)) \delta_i} \delta_N \right] \\ (\omega_1, \dots, \omega_N) &\mapsto \sum_{i=1}^N (\omega_i - \lambda'(\beta)) \delta_i \end{aligned}$$

sont croissantes. Ainsi,  $(\omega_1, \dots, \omega_N) \mapsto 1/Z_{N,u-\lambda(\beta)}^{\beta,\omega}$  est décroissante et l'inégalité FKG (l'inégalité est inversée si l'une des fonctions est décroissante) nous montre donc que

$$\mathbb{E}_{N,\beta}^\tau \left[ \frac{1}{Z_{N,u-\lambda(\beta)}^{\beta,\omega}} \left( \sum_{i=1}^N (\omega_i - \lambda'(\beta)) \delta_i \right) \right] \leq \mathbb{E}_{N,\beta}^\tau \left[ \frac{1}{Z_{N,u-\lambda(\beta)}^{\beta,\omega}} \right] \mathbb{E}_{N,\beta}^\tau \left[ \sum_{i=1}^N (\omega_i - \lambda'(\beta)) \delta_i \right].$$

Il reste à remarquer que dans le cas  $\delta_i = 0$  on a  $\mathbb{E}_{N,\beta}^\tau [(\omega_i - \lambda'(\beta)) \delta_i] = 0$  et aussi que dans le cas  $\delta_i = 1$  on a  $\mathbb{E}_{N,\beta}^\tau [(\omega_i - \lambda'(\beta)) \delta_i] = \mathbb{E}_\beta[\omega_i] - \lambda'(\beta) = 0$ . Pour la dernière identité on a utilisé la définition (4.4) de  $\mathbb{P}_\beta$  pour avoir

$$\mathbb{E}_\beta[\omega_i] = \frac{1}{\mathbb{E}[e^{\beta\omega_i}]} \mathbb{E}[\omega_i e^{\beta\omega_i}] = \frac{\partial}{\partial \beta} \log \mathbb{E}[e^{\beta\omega_i}] = \lambda'(\beta).$$

Cela conclut la démonstration de (4.2) et donc de la Proposition 4.1.  $\square$

**Exercice 4.1 (Inégalité de Harris–FKG).** La démonstration se fait par récurrence.

1. Soit  $n = 1$ . Soient  $\omega_1, \omega'_1$  deux copies indépendantes de  $\omega_1$ .  
Montrer que  $\mathbb{E}[(f(\omega_1) - g(\omega_1))(f(\omega'_1) - g(\omega'_1))] \geq 0$ , puis conclure.
2. Soit  $n \geq 2$ . On pose  $\tilde{f}(\omega_1) = \mathbb{E}[f(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_1]$  et  $\tilde{g}(\omega_1) = \mathbb{E}[g(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_1]$ .  
En appliquant l'inégalité pour  $n = 1$  à  $\tilde{f}, \tilde{g}$ , montrer l'étape de récurrence et conclure.

## 4.2 Martingale et transition de faible à fort désordre

### 4.2.1 La martingale et sa transition de phase

Pour avoir une indication si les modèles quenched et annealed ont des comportements proches, une indication est donnée si l'on regarde le système *quenched* au point critique annealed  $h_c^{\text{ann}}(\beta) = -\lambda(\beta)$ . On pose

$$W_{N,\beta}^\omega := \tilde{Z}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega} = \mathbb{E} \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (\beta\omega_i - \lambda(\beta))\delta_i \right) \right], \quad (4.5)$$

où on a considéré ici la fonction de partition du modèle libre (sans la contrainte  $N \in \tau$ ), voir (3.4). Si  $W_{N,\beta}^\omega$  reste proche de  $\mathbb{E}[W_{N,\beta}^\omega] = 1$ , cela suggère que les modèles quenched et annealed ont des comportements proches (au moins à  $h_c^{\text{ann}}(\beta)$ ). Si en revanche  $W_{N,\beta}^\omega$  tend vers 0, cela signifie que l'espérance  $\mathbb{E}[W_{N,\beta}^\omega] = 1$  est portée par des réalisations atypiques de l'environnement  $\omega$ ; cela suggère que le modèle quenched aura un comportement différent du modèle annealed (au moins à  $h_c^{\text{ann}}(\beta)$ ).

**Lemme 4.2.** *Pour tout  $\beta \geq 0$ , la suite de variables aléatoires  $(W_{N,\beta})_{N \geq 0}$  est une martingale pour la filtration  $\mathcal{F}_N := \sigma(\omega_i, i \leq N)$ . Il s'agit d'une martingale positive, on peut donc définir la limite presque sûre suivante :*

$$W_{\infty,\beta} := \lim_{N \rightarrow \infty} W_{N,\beta}.$$

**Exercice 4.2.** Montrer le lemme 4.2.

La question que l'on se pose est maintenant de savoir si cette limite est dégénérée ou non, c'est-à-dire si  $W_{\infty,\beta} = 0$  ou non, ce qui devrait être lié à la pertinence ou non-pertinence du désordre. Une remarque importante est la suivante :

l'événement  $\{W_{\infty,\beta} = 0\}$  appartient à la tribu asymptotique  $\mathcal{Q} = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{Q}_k$ ,

où  $\mathcal{Q}_k = \sigma(\omega_i, i > k)$ . En effet, pour tout  $k \geq 1$ , on a les bornes suivantes (exercice) :

$$\mathbb{P}(\tau_1 = k) e^{\beta\omega_k - \lambda(\beta)} W_{N-k,\beta}^{\theta^k \omega} \leq W_{N,\beta}^\omega \leq e^{\sum_{i=1}^k \beta|\omega_i|} \mathbb{P}(k \in \tau) W_{N-k,\beta}^{\theta^k \omega} \quad \text{pour } N \geq k.$$

Cela montre que pour tout  $k \geq 1$ ,  $\{W_{\infty,\beta} = 0\} = \{\lim_{N \rightarrow \infty} W_{N-k,\beta}^{\theta^k \omega} = 0\} \in \mathcal{Q}_k$ , qui est ce que l'on devait montrer.

D'après la loi du 0-1 de Kolmogorov, on a  $P(W_{\infty,\beta} = 0) = 0$  ou  $1$ , ce qui pour résumer donne la dichotomie suivante :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_{N,\beta} = W_{\infty,\beta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \text{soit } W_{\infty,\beta} > 0 & \mathbb{P}\text{-p.s.} & \rightsquigarrow \text{faible désordre,} \\ \text{soit } W_{\infty,\beta} = 0 & \mathbb{P}\text{-p.s.} & \rightsquigarrow \text{fort désordre.} \end{cases}$$

On a de nouveau utilisé la dénomination faible et fort désordre, mais elle a ici un sens différent de celle introduite dans la Section 4.1.2. On utilise cependant la même terminologie car il est conjecturé que les deux notions coïncident.

**Transition de phase.** Le résultat suivant, basé sur une propriété de monotonie de l'événement  $\{W_{\infty,\beta} = 0\}$ , montre qu'il y a une transition de phase entre une phase de faible désordre et une phase de fort désordre.

**Proposition 4.3.** *Il existe un  $\tilde{\beta}_c \geq 0$  tel que*

$$\begin{aligned} W_{\infty,\beta} &> 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} && \text{pour } \beta < \tilde{\beta}_c, \\ W_{\infty,\beta} &= 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} && \text{pour } \beta > \tilde{\beta}_c. \end{aligned}$$

Il est conjecturé que l'on a  $\tilde{\beta}_c = \beta_c$ , où  $\beta_c$  est le point critique pour l'égalité des points critiques quenched et annealed, voir la Proposition 4.1. Ainsi, les deux notions de faible désordre ( $W_{\infty,\beta} > 0$  ou  $h_c(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta)$ ) et de fort désordre ( $W_{\infty,\beta} = 0$  ou  $h_c(\beta) > h_c^{\text{ann}}(\beta)$ ) devraient coïncider, au moins pour  $\beta \neq \tilde{\beta}_c$ .

On va démontrer plus bas que si  $W_{\infty,\beta} > 0$  alors  $\mathbb{P}\text{-p.s.}$  alors  $h_c(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta)$  (et les comportements critiques quenched et annealed sont proches), voir le Théorème 4.9 En particulier, cela montre que  $\tilde{\beta}_c \geq \beta_c$ .

*Démonstration.* Le cœur de la démonstration de la Proposition 4.3 repose sur les mêmes outils que celles de la Proposition 4.1, on donne simplement ici les principales étapes, sous forme d'exercice. On se fixe  $\gamma \in ]0, 1[$ .

1. Montrer que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(W_{N,\beta}^\omega)^\gamma] = \mathbb{E}[(W_{\infty,\beta})^\gamma]$ .

En déduire que  $W_{\infty,\beta} = 0$   $\mathbb{P}\text{-p.s.}$  si et seulement si  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(W_{N,\beta}^\omega)^\gamma] = 0$ .

2. Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\beta \mapsto \mathbb{E}[(W_{N,\beta}^\omega)^\gamma]$  est décroissante.

*On pourra dériver puis utiliser l'inégalité FKG exactement comme dans la démonstration de la Proposition 4.1.*

3. Conclure. □

## 4.2.2 Critère pour la transition de phase

On donne ici le résultat principal de cette section, qui permet de déterminer si l'on a vraiment une transition de phase, c'est-à-dire si  $\tilde{\beta}_c = 0$  ou  $\tilde{\beta}_c > 0$ . On suppose que le processus de renouvellement sous-jacent est récurrent et vérifie l'hypothèse (\*).



**Théorème 4.4.** *On a  $\tilde{\beta}_c > 0$  si et seulement si  $\sum_{n=0}^{\infty} P(n \in \tau)^2 < +\infty$ .  
En particulier,  $\tilde{\beta}_c > 0$  si  $\alpha < 1/2$  et  $\tilde{\beta}_c = 0$  si  $\alpha > 1/2$ .*

Pour la deuxième partie du théorème, on peut utiliser les estimées (3.9) de la Section 3.2.3. On en déduit que si  $E[\tau_1] < +\infty$  (en particulier si  $\alpha > 1$ ), alors  $P(n \in \tau) \rightarrow E[\tau_1]^{-1}$ , ce qui montre que  $\sum_{n=0}^{\infty} P(n \in \tau)^2 < +\infty$ . Le cas  $\alpha = 1$  tombe dans le même cadre, car alors  $P(n \in \tau) \sim E[\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq n\}}]$  est une fonction à variation lente.

Si  $\alpha \in ]0, 1[$ , alors  $P(n \in \tau) \sim c_\alpha L(n)^{-1} n^{-(1-\alpha)}$  et on a donc  $\sum_{n=0}^{\infty} P(n \in \tau)^2 < +\infty$  si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L(n)^2 n^{1+2\alpha-1}} < +\infty.$$

On retrouve le critère donné plus haut : la somme est finie (donc  $\tilde{\beta} > 0$ ) si  $\alpha < 1/2$  et elle est infinie (donc  $\tilde{\beta}_c = 0$ ) si  $\alpha > 1/2$ .

Dans le cas  $\alpha = 1/2$ , on obtient  $\tilde{\beta}_c > 0$  si et seulement si  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{nL(n)^2} < +\infty$ . Notons que dans le cas de la marche aléatoire simple, la fonction à variation lente  $L(n)$  converge vers une constante : cela signifie que la somme est infinie, donc que  $\tilde{\beta}_c = 0$ ; et cela suggère que le désordre est pertinent dans ce cas.

*Remarque 4.5.* Notons que si  $\tau, \tau'$  sont deux copies indépendantes d'un processus de renouvellement, l'intersection  $\rho = \tau \cap \tau'$  est un processus de renouvellement. De plus, le processus  $\rho$  est transient si et seulement si  $E[|\rho|] < +\infty$ ; en effet, grâce à la propriété de renouvellement,  $|\rho|$  suit une loi géométrique de paramètre  $P(\rho_1 = +\infty)$  donc  $\rho$  est transient si et seulement si  $P(\rho_1 = +\infty) = E[|\rho|]^{-1} > 0$ . Ainsi,  $\rho = \tau \cap \tau'$  est transient si et seulement si

$$E[|\rho|] = \sum_{n=0}^{\infty} P(n \in \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n \in \tau)^2 < +\infty.$$

□

**Cas  $\sum_{n=0}^{\infty} P(n \in \tau)^2 < +\infty$ ,  $\tau \cap \tau'$  transient.**

On doit montrer ici que  $\tilde{\beta}_c > 0$ . On va en fait donner une borne inférieure sur  $\tilde{\beta}_c$  en contrôlant le moment d'ordre deux de  $W_{N,\beta}^\omega$ . Notons que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} (W_{N,\beta}^\omega)^2 &= E \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (\beta \omega_i - \lambda(\beta)) \delta_i \right) \right] E \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (\beta \omega_i - \lambda(\beta)) \delta'_i \right) \right] \\ &= E^{\otimes 2} \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (\beta \omega_i - \lambda(\beta)) (\delta_i + \delta'_i) \right) \right], \end{aligned}$$

où  $\tau, \tau'$  sont deux copies indépendantes du renouvellement et  $\delta_i = \mathbb{1}_{\{i \in \tau\}}$ ,  $\delta'_i = \mathbb{1}_{\{i \in \tau'\}}$ . En prenant l'espérance, et en notant que  $\mathbb{E}[e^{(\beta \omega_i - \lambda(\beta))(\delta_i + \delta'_i)}] = e^{(\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta))\delta_i \delta'_i}$ , on obtient

$$\mathbb{E}[(W_{N,\beta}^\omega)^2] = E^{\otimes 2} \left[ \exp \left( (\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)) \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{i \in \tau \cap \tau'\}} \right) \right].$$

Par convergence monotone, on a

$$\sup_{N \geq 1} \mathbb{E}[(W_{N,\beta}^\omega)^2] = \mathbb{E}^{\otimes 2} \left[ \exp \left( (\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{i \in \tau \cap \tau'\}} \right) \right].$$

Comme  $\rho = \tau \cap \tau'$  est transient,  $|\rho| = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{i \in \tau \cap \tau'\}}$  est une variable aléatoire géométrique de paramètre  $p = 1/\mathbb{E}[|\rho|] > 0$ , où  $\mathbb{E}[|\rho|] = \sum_{n=0}^{\infty} P(n \in \tau)^2$ . On obtient donc

$$\sup_{N \geq 1} \mathbb{E}[(W_{N,\beta}^\omega)^2] < +\infty \quad \text{pour } \beta < \beta_2 := \sup \left\{ \beta, \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) < \log \left( \frac{1}{1-p} \right) \right\}.$$

Notons que  $\beta_2 > 0$  car  $\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) \sim \beta^2$  quand  $\beta \downarrow 0$  et peut notamment être rendu arbitrairement petit.

En conclusion, pour tout  $\beta < \beta_2$ , la martingale  $(W_{N,\beta}^\omega)_{N \geq 0}$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{P})$ . Elle converge alors dans  $L^2$ , donc dans  $L^1$ , et en particulier  $\mathbb{E}[W_{\infty,\beta}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[W_{N,\beta}^\omega] = 1$ , ce qui exclut d'avoir  $W_{\infty,\beta} = 0$   $\mathbb{P}$ -p.s. On a donc montré que si  $\tau \cap \tau'$  est transient alors  $W_{\infty,\beta} > 0$   $\mathbb{P}$ -p.s. pour tout  $\beta < \beta_2$ , ce qui montre que  $\tilde{\beta}_c \geq \beta_2 > 0$ .  $\square$

*Remarque 4.6.* Une conséquence des résultats de [AB18] est que l'on a  $\tilde{\beta}_c > \beta_2$  pour tout  $\alpha < 2/5$ . Il est conjecturé que c'est en réalité le cas pour tout  $\alpha < 1/2$ . Cela signifie qu'il existe un régime  $\beta \in (\beta_2, \tilde{\beta}_c)$  où la martingale converge p.s. mais pas dans  $L^2$ .  $\square$

**Cas  $\sum_{n=0}^{\infty} P(n \in \tau)^2 = +\infty$ ,  $\tau \cap \tau'$  récurrent.**

On se fixe  $\beta > 0$  et on veut montrer que l'on a  $W_{\infty,\beta} = 0$  p.s.; il nous suffit en fait de montrer que  $W_{N,\beta}^\omega \rightarrow 0$  en probabilité. On va utiliser la caractérisation suivante de la convergence en probabilité.

**Lemme 4.7.** *S'il existe une suite  $(A_N)_{N \geq 1}$  d'événements tels que  $A_N \in \sigma(\omega_i, i \leq N)$  et qui vérifient :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_N) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[W_{N,\beta}^\omega \mathbb{1}_{A_N}] = 0, \quad (4.6)$$

*alors  $(W_{N,\beta}^\omega)_{N \geq 1}$  converge en probabilité vers 0.*

*Démonstration.* La démonstration est très simple : pour  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\mathbb{P}(W_{N,\beta}^\omega > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(A_N^c) + \mathbb{P}(W_{N,\beta}^\omega \mathbb{1}_{A_N} > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(A_N^c) + \varepsilon^{-1} \mathbb{E}[W_{N,\beta}^\omega \mathbb{1}_{A_N}],$$

qui tend vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$ , par hypothèse.  $\square$

Notons que  $W_{N,\beta}^\omega \geq 0$  et  $\mathbb{E}[W_{N,\beta}^\omega] = 1$ . On peut donc voir  $W_{N,\beta}^\omega$  comme une densité de probabilité, et définir  $\hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}$  par

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}}{d\mathbb{P}} = W_{N,\beta}^\omega.$$

On possède une interprétation de la loi  $\hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}$  : pour tout événement  $A$  on a

$$\hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}(A) = \mathbb{E}[W_{N,\beta}^\omega \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^N e^{(\beta\omega_i - \lambda(\beta))\mathbf{1}_{\{i \in \tau\}}}\right]\right] = \mathbb{E}[\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau(A)], \quad (4.7)$$

où  $\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau$  est définie en (4.3). Autrement dit, la loi de  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq N}$  sous  $\hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}$  est obtenue de la manière suivante : on tire un processus de renouvellement  $\tau$  sous  $\mathbb{P}$  puis on tilte ensuite de  $\beta$  les  $\omega_i$  pour  $i \in \tau$ . On rappelle que sous  $\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau$  les  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont indépendants, de loi  $\mathbb{P}$  si  $i \notin \tau$  et de loi  $\mathbb{P}_\beta$  si  $i \in \tau$ , voir (4.3)-(4.4) ; noter que sous  $\hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}$  les  $\omega_i$  ne sont plus indépendants !

Le Lemme 4.7 montre donc que pour obtenir la convergence vers 0 de  $(W_{N,\beta}^\omega)_{N \geq 1}$ , on doit trouver une suite d'événements  $(A_N)_{N \geq 1}$  qui sont typiques sous  $\mathbb{P}$ , c'est-à-dire  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_N) = 1$ , mais deviennent atypiques sous  $\hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}$ , c'est-à-dire  $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}(A_N) = 0$ . Autrement dit, on doit montrer que la loi  $\hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}$  devient étrangère à la mesure  $\mathbb{P}$ .

Il reste simplement à bien choisir les événements  $A_N$ . On va essentiellement traiter le cas  $\alpha > 1$  dans (\*); on discutera du cas  $\alpha = \frac{1}{2}$  plus bas.

**Cas  $\alpha > \frac{1}{2}$ .** On considère l'événement

$$A_N = \{X_N \leq a_N\}, \quad \text{où} \quad X_N := \sum_{i=1}^N \omega_i,$$

et où  $a_N$  est une suite que l'on va déterminer plus bas, telle que  $a_N \gg \sqrt{N}$ .

•  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_N) = 1$ . Ce point est facile : comme on a  $\mathbb{E}[X_N] = 0$  et  $\text{Var}(X_N) = N$ , l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev montre que

$$\mathbb{P}(A_N^c) \leq \frac{1}{a_N^2} \text{Var}(X_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

grâce au choix  $a_N \gg \sqrt{N}$ .

•  $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}(A_N) = 1$ . Notons que, au vu de l'interprétation de  $\hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}$ , on a

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}(A_N) &= \mathbb{E}[\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau(X_N \leq a_N)] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau(X_N \leq a_N) \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}_{N,\beta}^\tau[X_N] \geq 2a_N\}}] + \mathbb{P}(\mathbb{E}_{N,\beta}^\tau[X_N] < 2a_N) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pour le premier terme, on a, pour une réalisation de  $\tau$  fixée,

$$\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau(X_N \leq a_N) \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}_{N,\beta}^\tau[X_N] \geq 2a_N\}} \leq \mathbb{P}_{N,\beta}^\tau(X_N - \mathbb{E}_{N,\beta}^\tau[X_N] \leq -a_N) \leq \frac{1}{a_N^2} \text{Var}_{N,\beta}^\tau(X_N),$$

avec, par indépendance des  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq N}$  sous  $\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau$

$$\text{Var}_{N,\beta}^\tau(X_N) = \sum_{i=1}^N \text{Var}_{N,\beta}^\tau(\omega_i) = \sum_{i=1}^N (\text{Var}(\omega_i) \mathbf{1}_{\{i \notin \tau\}} + \text{Var}_\beta(\omega_i) \mathbf{1}_{\{i \in \tau\}}) \leq \max(1, \sigma_\beta^2) N.$$

Comme  $a_N \gg \sqrt{N}$ , on obtient que le premier terme dans la borne supérieure de (4.8) tend vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$ .

Il reste le dernier terme de (4.8). Comme  $\mathbb{E}_\beta[\omega_i] = \lambda'(\beta)$ , on a pour une réalisation de  $\tau$  fixé,  $\mathbb{E}_{N,\beta}^\tau[X_N] = \lambda'(\beta) \sum_{i=1}^N \delta_i$  et on doit estimer la probabilité

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^N \delta_i < \frac{2}{\lambda'(\beta)} a_N\right) \leq \mathbb{P}(\tau_{k_N} > N) \quad \text{où} \quad k_N := \lceil \frac{2}{\lambda'(\beta)} a_N \rceil.$$

Il reste à effectuer le choix de  $a_N$  (donc de  $k_N$ ) pour que cette probabilité tende vers 0, en s'assurant que  $a_N \gg \sqrt{N}$  (ce qui est équivalent à  $\lambda'(\beta)k_N \gg \sqrt{N}$ ).

Si  $\mathbb{E}[\tau_1] < +\infty$ . Alors la loi des grands nombres montre que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_{k_N} > N) = 0$  si  $k_N \leq cN$  avec  $c < 1/\mathbb{E}[\tau_1]$ . Il nous suffit donc de prendre  $a_N = c'N$  avec  $c' = \frac{\lambda'(\beta)}{4\mathbb{E}[\tau_1]}$ , qui vérifie bien  $a_N \gg \sqrt{N}$ .

Si  $\mathbb{E}[\tau_1] = +\infty$ ,  $\alpha > \frac{1}{2}$ . On peut majorer la probabilité en utilisant un argument de troncation puis l'inégalité de Markov (qui s'avère optimal) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{k_N} > N) &\leq \mathbb{P}(\exists i \leq k_N, \tau_i - \tau_{i-1} > N) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k_N} (\tau_i - \tau_{i-1}) \mathbb{1}_{\{\tau_i - \tau_{i-1} \leq N\}} > N\right) \\ &\leq k_N \mathbb{P}(\tau_1 > N) + \frac{k_N}{N} \mathbb{E}[\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq N\}}], \end{aligned}$$

où pour la deuxième inégalité on a utilisé la sous-additivité et l'inégalité de Markov. Maintenant, si  $\alpha < 1$ , grâce à (\*) on a  $\mathbb{P}(\tau_1 > N) \sim c_\alpha L(N)N^{-\alpha}$  et aussi  $\mathbb{E}[\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq N\}}] \sim c_\alpha L(N)N^{1-\alpha}$ , donc

$$\mathbb{P}(\tau_{k_N} > N) \leq ck_N L(N)N^{-\alpha}. \quad (4.9)$$

Il suffit donc de choisir  $k_N \ll L(N)^{-1}N^\alpha$  avec  $\lambda'(\beta)k_N \gg \sqrt{N}$ , ce qui est toujours possible si  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Si  $\alpha = 1$ , on obtient une borne supérieure  $\mathbb{P}(\tau_{k_N} > N) \leq ck_N L^*(N)N^{-1}$  pour une fonction à variations lente  $L^*(\cdot)$ , et il suffit de choisir  $\sqrt{N} \ll k_N \ll L(N)^{-1}N$ .

**Cas  $\alpha = \frac{1}{2}$ .** Dans le cas  $\alpha = \frac{1}{2}$ , le choix d'événement  $A_N$  ci-dessus ne fonctionne pas (sauf si  $L(N) \rightarrow +\infty$ ). Introduisons les notations

$$u(n) := \mathbb{P}(n \in \tau) \quad \text{et} \quad R_N := \sum_{i=1}^N u(i)^2,$$

de sorte que l'hypothèse du Théorème 4.4 est que  $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = +\infty$ . On définit alors l'événement

$$A_N = \{X_N \leq a_N\} \quad \text{où} \quad X_N := \sum_{i=1}^N u(i)\omega_i,$$

avec  $a_N \ll \sqrt{R_N}$ .

- $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_N) = 1$ . Là encore, ce point est facile : comme on a  $\mathbb{E}[X_N] = 0$  et  $\text{Var}(X_N) = \sum_{i=1}^N u(i)^2 = R_N$ , donc l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev montre que  $\mathbb{P}(A_N^c) \leq \frac{1}{a_N^2} R_N \rightarrow 0$ .

- $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}(A_N) = 1$ . De manière analogue à (4.8), on a

$$\hat{\mathbb{P}}_{N,\beta}(A_N) \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{N,\beta}^\tau(X_N \leq a_N) \mathbb{1}_{\{\mathbb{E}_{N,\beta}^\tau[X_N] \geq 2a_N\}}\right] + \mathbb{P}\left(\mathbb{E}_{N,\beta}^\tau[X_N] < 2a_N\right),$$

et le premier terme tend vers 0 pour les mêmes raisons que précédemment, car pour toute réalisation de  $\tau$  fixée on a  $\mathbb{V}\text{ar}_{N,\beta}^\tau(X_N) \leq \max(1, \sigma_\beta^2)R_N$ .

En posant  $Y_N = Y_N(\tau) := \sum_{i=1}^N u(i)\delta_i$ , il ne reste qu'à montrer que la dernière probabilité, qui est  $P(Y_N < \frac{2}{\lambda'(\beta)}a_N)$ , tend vers 0. Cela découle de la convergence en probabilité suivante

$$\frac{1}{R_N}Y_N = \frac{1}{R_N} \sum_{i=1}^N u(i)\delta_i \implies 1 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Comme on a clairement  $E[Y_N] = R_N$ , cette convergence en probabilité découle du fait que  $\text{Var}(Y_N) = o(R_N^2)$  quand  $N \rightarrow \infty$ , qui est donc l'unique chose qui nous reste à montrer.

Faisons le calcul de  $\text{Var}(Y_N)$  :

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_N) &= \sum_{i=1}^N u(i)^2 \text{Var}(\delta_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N u(i)u(j) (E[\delta_i\delta_j] - E[\delta_i]E[\delta_j]) \\ &\leq R_N + 2 \sum_{i=1}^N u(i)^2 \sum_{j=i+1}^N u(j) (u(j-i) - u(j)). \end{aligned}$$

Notons que grâce à (3.9) on a  $u(n) \sim L(n)^{-1}n^{-1/2}$ . Ainsi, on obtient  $u(j-i)/u(j) \rightarrow 1$  quand  $j \rightarrow +\infty$  avec  $(j-i)/j \rightarrow 1$ ; autrement dit, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $C_\varepsilon$  tel que  $u(j-i) - u(j) \leq \varepsilon u(j)$  pour tout  $j \geq C_\varepsilon i$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_N) &\leq R_N + 2\varepsilon \sum_{i=1}^N u(i)^2 \sum_{j=C_\varepsilon i}^N u(j)^2 + 2 \sum_{i=1}^N u(i)^2 \sum_{j=i+1}^{C_\varepsilon i} u(j)u(j-i) \\ &\leq R_N + 2\varepsilon R_N^2 + C'_\varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{1}{L(i)^3 i^{3/2}} \sum_{k=1}^{(C_\varepsilon-1)i} \frac{1}{L(k)k^{1/2}} \leq 3\varepsilon R_N^2 + C''_\varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{1}{L(i)^4 i}, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'équivalent de  $u(n)$  (avec les propriétés des fonctions à variations lentes dans la note de bas de page 61). Il reste maintenant à utiliser le fait que  $\frac{1}{L(N)^2} = o(R_N)$  quand  $N \rightarrow \infty$ , voir [BGT89, Prop. 1.5.9a] (ou procéder comme dans la question 4 de l'Exercice 3.3), pour avoir que le dernier terme est majoré par  $\sum_{i=1}^N \frac{o(R_i)}{L(i)^2 i} = o(R_N^2)$ , en utilisant aussi que  $(R_i)_{i \geq 0}$  est croissant donc  $R_i \leq R_N$ . Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, cela montre que  $\text{Var}(Y_N) = o(R_N^2)$ , comme annoncé.  $\square$

*Remarque 4.8 (Désordre intermédiaire).* La démonstration précédente fonctionne même si le paramètre  $\beta$  dépend de  $N$  et tend vers 0. On laisse le soin d'adapter la preuve ci-dessus, en suivant notamment la dépendance de  $a_N$  en  $\beta$  (noter que  $\lambda'(\beta) \sim \beta$  quand  $\beta \downarrow 0$ ). On peut obtenir les résultats suivants (on omet le cas  $\alpha = 1$  pour simplifier) : si  $(\beta_N)_{N \geq 1}$  est tel que

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N \sqrt{N} = +\infty & \text{si } \alpha > 1, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N L(N) N^{\frac{1}{2}-\alpha} = +\infty & \text{si } \alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N \sqrt{R_N} = +\infty & \text{si } \alpha = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

alors  $(W_{N,\beta_N}^\omega)_{N \geq 0}$  converge vers 0 en probabilité.

Il s'avère que, dans le cas  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$ , si l'on choisit  $\beta_N = \hat{\beta}L(N)^{-1}N^{\alpha-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ , la fonction de partition  $(W_{N,\beta_N}^\omega)_{N \geq 0}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $W_{\infty,\hat{\beta}}$  *non-dégénérée*, c'est-à-dire non nulle (comme dans le cas où  $\beta > 0$ ) et non égale à 1 (comme dans le cas  $\beta = 0$ ). Il s'agit d'un régime dit de *désordre intermédiaire*, qui a été beaucoup étudié ces dernières années, à commencer par [CSZ17a]. On dit que  $\hat{\beta}L(N)^{-1}N^{\alpha-\frac{1}{2}}$  est une fenêtre critique, en quelque sort où a vraiment lieu la transition entre faible et fort désordre.

Le cas marginal  $\alpha = \frac{1}{2}$  est beaucoup plus difficile et il n'y a que très peu de résultats pour la limite de désordre intermédiaire dans le cadre du modèle d'accrochage, voir [CSZ17b]. Au vu de résultats récents dans un contexte similaire, on peut s'attendre à ce qu'il faille zoomer autour de  $\frac{1}{\sqrt{R_N}}$  pour observer un régime de désordre intermédiaire, c'est-à-dire prendre  $\beta_N - \frac{1}{\sqrt{R_N}} = O(\frac{1}{R_N})$ ...  $\square$

### 4.3 Non-pertinence du désordre

On va montrer dans cette section le résultat suivant (dont la démonstration est empruntée à [Lac10]), qui montre que dans le régime de faible désordre, les points critiques quenched et annealed sont égaux et les comportements critiques sont proches.

**Théorème 4.9.** *Soit  $\beta > 0$  tel que  $W_{\infty,\beta} := \lim_{N \rightarrow \infty} W_{N,\beta}^\omega > 0$  p.s. Alors on a  $h_c(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta)$  et  $F(\beta, h_c(\beta) + u) = u^{\frac{1}{\alpha} + o(1)}$  quand  $u \downarrow 0$ .*

Combiné avec le Théorème 4.4 (et la Proposition 4.3), un corollaire immédiat est le suivant.

**Corollaire 4.10.** *Si  $\sum_{n=1}^{\infty} P(n \in \tau)^2 < +\infty$  (en particulier si  $\alpha < 1/2$ ), alors le désordre est non-pertinent.*

En effet,  $\tilde{\beta}_c > 0$  et pour tout  $\beta < \tilde{\beta}_c$  on a  $h_c(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta)$  (autrement dit  $\beta_c \geq \tilde{\beta}_c$ ) et  $F(\beta, h_c(\beta) + u) = F^{\text{ann}}(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u)^{1+o(1)}$  quand  $u \downarrow 0$ .

La démonstration du Théorème 4.9 est basée sur le lemme suivant, qui montre que si  $W_{\infty,\beta}^\omega > 0$  p.s., la mesure d'accrochage *libre*  $\tilde{P}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega}$ , c'est-à-dire sans la contrainte  $\{N \in \tau\}$  voir (3.3), est “proche” de la mesure de référence  $P$ , dans le sens où les événements qui sont typiques sous  $P$  le sont aussi sous  $\tilde{P}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega}$ .

**Lemme 4.11.** *Soit  $(A_N)_{N \geq 0}$  une suite d'événements avec  $A_N \in \sigma(\tau \cap [0, N])$  telle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} P(A_N) = 1$ . Alors si  $W_{\infty,\beta}^\omega > 0$  p.s., on a aussi*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega}(A_N) = 1 \quad \text{dans } L^1(\mathbb{P}).$$

*Démonstration.* On va travailler avec le complémentaire de  $A_N$ . Soit  $\varepsilon > 0$  arbitraire. Alors

$$\mathbb{E}[\mathbf{P}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega}(A_N^c)] \leq \mathbb{P}(W_{N,\beta}^\omega < \varepsilon) + \mathbb{E}[\mathbf{P}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega}(A_N^c) \mathbb{1}_{\{W_{N,\beta}^\omega \geq \varepsilon\}}].$$

Pour le deuxième terme, on utilise que  $W_{N,\beta}^\omega = \tilde{Z}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega}$  est la fonction de partition libre, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega}(A_N^c) \mathbb{1}_{\{W_{N,\beta}^\omega \geq \varepsilon\}} &= \frac{1}{W_{N,\beta}^\omega} \mathbb{E} \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (\beta \omega_i - \lambda(\beta)) \delta_i \right) \mathbb{1}_{A_N^c} \right] \mathbb{1}_{\{W_{N,\beta}^\omega \geq \varepsilon\}} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^N (\beta \omega_i - \lambda(\beta)) \delta_i \right) \mathbb{1}_{A_N^c} \right]. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance, comme  $\mathbb{E}[e^{\beta \omega_i - \lambda(\beta)}] = 1$ , on en déduit que

$$\mathbb{E}[\mathbf{P}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega}(A_N^c)] \leq \mathbb{P}(W_{N,\beta}^\omega < \varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathbb{P}(A_N^c).$$

En prenant la limite quand  $N \rightarrow \infty$ , la borne supérieure converge vers  $\mathbb{P}(W_{\infty,\beta} < \varepsilon)$ , qui peut être rendue arbitrairement petite en prenant  $\varepsilon \downarrow 0$ , par hypothèse.  $\square$

*Démonstration (du Théorème 4.9).* Soit  $u > 0$ . Rappelons que l'on a d'après le Théorème 3.9 et la Remarque 3.10, il existe une constante  $c (= c_{h,\beta})$  telle que l'énergie libre vérifie

$$F(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u) \geq \frac{1}{N} \mathbb{E}[\log \tilde{Z}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)+u}^{\beta,\omega}] - c \frac{\log N}{N}$$

pour tout  $N \geq 1$ . Maintenant, par convexité, on a

$$\log \tilde{Z}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)+u}^{\beta,\omega} \geq \log \tilde{Z}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega} + u \tilde{\mathbf{E}}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \delta_i \right],$$

donc en utilisant la borne  $\log \tilde{Z}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega} \geq \log \mathbb{P}(\tau_1 > N) \geq -c' \log N$ , on obtient

$$F(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u) \geq \frac{u}{N} \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{E}}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \delta_i \right] \right] - c'' \frac{\log N}{N}.$$

Considérons la suite d'événements  $A_N := \{ \sum_{i=1}^N \delta_i \geq k_N \}$ , où  $k_N$  est un entier à déterminer; on va appliquer le Lemme 4.11. On a comme dans (4.9) (qui reste valable pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ) :

$$\mathbb{P}(A_N^c) = \mathbb{P}(\tau_{k_N} > N) \leq C k_N L(N) N^{-\alpha}.$$

Cela montre qu'il suffit de choisir  $k_N \ll L(N)^{-1} N^\alpha$ , par exemple  $k_N = N^{\alpha-\eta}$  pour un  $\eta > 0$  (arbitraire), pour avoir que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_N) = 1$ . En utilisant le Lemme 4.11, on obtient donc que pour  $N$  suffisamment grand,

$$\mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{E}}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega} \left[ \sum_{i=1}^N \delta_i \right] \right] \geq k_N \mathbb{E}[\mathbf{P}_{N,h_c^{\text{ann}}(\beta)}^{\beta,\omega}(A_N)] \geq \frac{1}{2} k_N.$$

On en conclut que pour tout  $N$  suffisamment grand

$$F(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u) \geq \frac{1}{2N} (u k_N - c \log N).$$

On peut maintenant prendre  $N = N_u := u^{-\frac{1}{\alpha}}$  pour obtenir que pour  $u$  suffisamment petit (c'est-à-dire pour  $N_u$  suffisamment grand), en se rappelant du choix  $k_N = N^{\alpha-\eta}$ , on a

$$F(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u) \geq \frac{u^{1/\alpha}}{2} (u^{-\eta/\alpha} - c' \log(1/u)) \geq c u^{(1-\eta)/\alpha},$$

où on a utilisé que  $\log(\frac{1}{u}) = o(u^{-\eta/\alpha})$  quand  $u \downarrow 0$ .

Comme  $\eta$  est arbitraire, cela montre que  $F(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u) \geq u^{\frac{1}{\alpha} + o(1)}$  quand  $u \downarrow 0$ ; cela montre notamment que  $h_c(\beta) \geq h_c^{\text{ann}}(\beta)$ , donc qu'il y a égalité des points critiques. Comme on sait que  $F(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u) \leq F^{\text{ann}}(\beta, h_c^{\text{ann}}(\beta) + u) = F(0, u) = u^{\frac{1}{\alpha} + o(1)}$ , cela conclut la démonstration du comportement critique.  $\square$

## 4.4 Inégalité de lissage et pertinence du désordre

Dans cette section, on va montrer le résultat suivant, tiré de [GT06b] (voir [CdH13] pour l'énoncé général ci-dessous). Il montre que la transition de phase du modèle désordonné est au moins d'ordre 2.

**Théorème 4.12.** *Pour tout  $\beta > 0$ , il existe une constante  $C_\beta > 0$  telle que*

$$F(\beta, h_c(\beta) + u) \leq C_\beta u^2 \quad \text{pour } u \in ]0, 1[.$$

Comme on a  $F^{\text{ann}}(\beta, h_c(\beta) + u) = F(0, u) = u^{v+o(1)}$  quand  $u \downarrow 0$  avec  $v = \max(\frac{1}{\alpha}, 1)$  (voir le Théorème 3.5) un corollaire immédiat est le suivant.

**Corollaire 4.13.** *Si  $\alpha > 1/2$ , le désordre est pertinent, en terme de comportements critiques.*

En effet, pour tout  $\beta > 0$ ,  $F(\beta, h_c(\beta) + u) = O(u^2) \ll u^{v+o(1)} = F^{\text{ann}}(\beta, h_c(\beta) + u)$  quand  $u \downarrow 0$ .

*Démonstration.* On va se concentrer sur le cas où  $\omega_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , qui permet de simplifier certains arguments.

L'idée de la démonstration est en réalité d'obtenir une borne inférieure sur l'énergie libre, plus précisément de comparer  $F(\beta, h)$  et  $F(\beta, h + u)$ . On va montrer la borne inférieure suivante : pour tout  $\beta, h$ , il existe  $C_\beta$  tel que pour tout  $u \in ]0, 1[$ ,

$$F(\beta, h) \geq K_{\beta, h, u} (F(\beta, h + u) - C_\beta u^2), \quad (4.10)$$

pour un  $K_{\beta, h, u} > 0$ . En prenant  $h = h_c(\beta)$ , le terme de gauche est nul, ce qui montre bien  $F(\beta, h + u) \leq C_\beta u^2$ .

Démontrons (4.10) pour un  $u$  fixé tel que  $h + u > h_c(\beta)$  (sinon il n'y a rien à démontrer). On se fixe  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que  $(1 - \varepsilon)F(\beta, h + u) > F(\beta, h)$  et



pour  $\ell$  grand (fixé, dont le choix en fonction de  $\varepsilon, \beta, h$  sera donné plus bas) on introduit l'événement

$$\mathcal{A}_\ell = \left\{ \omega ; \frac{1}{\ell} \log Z_{\ell,h}^{\beta,\omega} \geq (1 - \varepsilon) F(\beta, h + u) \right\}.$$

Notons que cet événement ne dépend que du *bloc*  $(\omega_1, \dots, \omega_\ell)$ .

Soulignons que comme  $\mathbb{P}$ -p.s. on a  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \log Z_{\ell,h}^{\beta,\omega} = F(\beta, h) < F(\beta, h + u)$ , l'événement  $\mathcal{A}_\ell$  est atypique, dans le sens où  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_\ell) = 0$ . On dira qu'un environnement  $\omega \in \mathcal{A}_\ell$  est *favorable*, dans le sens où l'énergie libre  $F_\ell^\omega := \frac{1}{\ell} \log Z_{\ell,h}^{\beta,\omega}$  y est strictement plus grand que sa valeur typique  $F(\beta, h)$ ; on dira aussi que le *bloc*  $(\omega_1, \dots, \omega_\ell)$  est favorable.

On considère maintenant l'ensemble des blocs d'environnement *favorables* dans  $\omega$  : on note  $\mathcal{I}$  les indices de ces blocs (on exclut le premier pour simplifier les notations qui suivent),

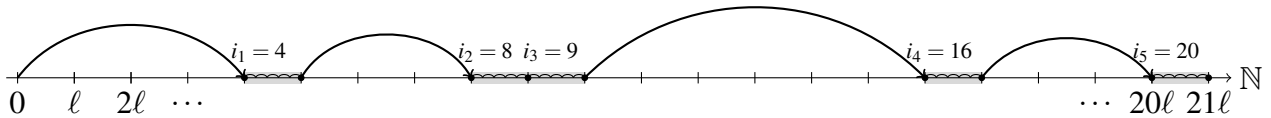
$$\mathcal{I} := \{i \geq 1, \theta^{i\ell} \omega \in \mathcal{A}_\ell\}.$$

L'événement  $\mathcal{A}_\ell$  étant atypique, les blocs favorables sont rares. On va minorer la fonction de partition en utilisant une stratégie pour l'environnement, dite *stratégie des régions rares*, qui consiste à visiter tous les blocs favorables et à ne visiter que ceux-là.

Notons  $\mathcal{I} = \{i_k\}_{k \geq 1}$  avec  $i_1 < i_2 < \dots$  les indices des blocs favorables. Alors, en ne gardant que les trajectoires de  $\tau$  qui visitent exclusivement les  $m$  premières régions rares, on obtient la borne inférieure suivante (voir la Figure 4.2) :

$$Z_{(i_m+1)\ell,h}^{\beta,\omega} \geq \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(\tau_1 = (i_k - i_{k-1} - 1)\ell) Z_{\ell,h}^{\beta,\theta^{i_k\ell}\omega}, \quad (4.11)$$

où on a utilisé la convention  $\mathbb{P}(\tau_1 = 0) = 1$  dans le cas où  $i_k = i_{k-1} + 1$ .



**FIG. 4.2** Représentation de la stratégie des régions rares. Ici, on considère les trajectoires qui visitent *exactement* les  $m = 5$  premiers blocs favorables; il s'agit de trajectoires de longueur  $(i_m + 1)\ell$ . À l'intérieur des régions rares, on obtient  $\frac{1}{\ell} \log Z_{\ell,h}^{\beta,\theta^{i\ell}\omega} \geq (1 - \varepsilon) F(\beta, h + u)$ , par définition de  $\mathcal{A}_\ell$ .

Maintenant, par définition de  $\mathcal{A}_\ell$ , à l'intérieur d'un bloc favorable, c'est-à-dire pour  $i \in \mathcal{I}$ , on a  $\frac{1}{\ell} \log Z_{\ell,h}^{\beta,\theta^{i\ell}\omega} \geq (1 - \varepsilon) F(\beta, h + u)$ . Ainsi, en prenant le log dans l'inégalité précédente et en divisant par  $(i_m + 1)\ell$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{(i_m + 1)\ell} \log Z_{(i_m+1)\ell,h}^{\beta,\omega} \\ \geq \frac{m}{i_m + 1} \left( (1 - \varepsilon) F(\beta, h + u) + \frac{1}{m\ell} \sum_{k=1}^m \log \mathbb{P}(\tau_1 = (i_k - i_{k-1} - 1)\ell) \right). \end{aligned}$$

Prenons maintenant la limite quand  $m \rightarrow \infty$ . On a clairement que  $i_m \rightarrow +\infty$ , donc le membre de gauche tend vers  $F(\beta, h)$ . Observons maintenant que les  $(i_k - i_{k-1})_{k \geq 1}$  sont

i.i.d. de loi géométrique de paramètre  $p_\ell := \mathbb{P}(\mathcal{A}_\ell)$ ; cela se voit en effet en définissant  $(i_k)_{k \geq 1}$  de manière itérative,  $i_k = \min\{i > i_{k-1}, \theta^{i_\ell} \omega \in \mathcal{A}_\ell\}$  (par convention  $i_0 = 0$ ), et en notant que les blocs  $\theta^{i_\ell}(\omega_1, \dots, \omega_\ell)$  sont indépendants car disjoints. Par la loi des grands nombres on a donc  $\frac{1}{m} i_m = \mathbb{E}[i_1] = (p_\ell)^{-1}$  p.s., ce qui permet de conclure que

$$F(\beta, h) \geq p_\ell \left( (1 - \varepsilon) F(\beta, h + u) + \frac{1}{\ell} \mathbb{E}[\log P(\tau_1 = (i_1 - 1)\ell)] \right),$$

où on a aussi utilisé la loi des grands nombres pour  $(\log P(\tau_1 = (i_k - i_{k-1} - 1)\ell))_{k \geq 1}$ .

Maintenant, il faut estimer le dernier terme. Si  $\ell$  est suffisamment grand, on a par hypothèse (\*) que  $P(\tau_1 = i\ell) \geq (i\ell)^{-(1+\alpha+\varepsilon)}$  pour tout  $i \geq 1$  : on en déduit que

$$\log P(\tau_1 = (i_1 - 1)\ell) \geq -(1 + \alpha + \varepsilon) \log((i_1 - 1)\ell) \mathbb{1}_{\{i_1 \geq 2\}},$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[\log P(\tau_1 = (i_1 - 1)\ell)] \geq -(1 + \alpha + \varepsilon) \mathbb{P}(i_1 \geq 2) \mathbb{E}[\log(i_1 \ell)],$$

en utilisant aussi le fait que, conditionnellement à  $i_1 \geq 2$ ,  $i_1 - 1$  suit une loi géométrique de paramètre  $p_\ell$  (donc a la même loi que  $i_1$ ). En appliquant l'inégalité de Jensen, on obtient  $\mathbb{E}[\log(i_1 \ell)] \leq \log \mathbb{E}[i_1] + \log \ell$  avec  $\mathbb{E}[i_1] = (p_\ell)^{-1}$ , de sorte que

$$F(\beta, h) \geq p_\ell \left( (1 - \varepsilon) F(\beta, h + u) + (1 + \alpha + \varepsilon) \frac{1}{\ell} \log p_\ell - c \frac{\log \ell}{\ell} \right).$$

Il reste à estimer la probabilité  $p_\ell = \mathbb{P}(\mathcal{A}_\ell)$ . On va montrer le lemme suivant.

**Lemme 4.14.** *Si les  $(\omega_i)_{i \geq 1}$  sont de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , on a*

$$\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \log \mathbb{P}(\mathcal{A}_\ell) \geq -\frac{1}{2\beta^2} u^2.$$

En utilisant ce lemme, on obtient que pour  $\ell$  suffisamment grand

$$F(\beta, h) \geq p_\ell \left( (1 - \varepsilon) F(\beta, h + u) - \frac{1 + \alpha + \varepsilon}{2\beta^2} u^2 - c \frac{\log \ell}{\ell} \right).$$

Quitte à prendre  $\ell$  encore plus grand pour que le dernier terme soit négligeable, on a obtenu

$$F(\beta, h) \geq p_\ell \left( (1 - \varepsilon) F(\beta, h + u) - \frac{1 + \alpha + 2\varepsilon}{2\beta^2} u^2 \right),$$

ce qui donne (4.10) avec  $C_\beta = \frac{1+\alpha+2\varepsilon}{(1-\varepsilon)2\beta^2}$  et  $K_{\beta,h,u} = p_\ell$ . □

Notons que dans le cas d'un désordre gaussien  $\omega_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , on a identifié la constante  $C_\beta$  dans le Théorème 4.12 :  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire dans la démonstration précédente, on a obtenu, pour tout  $u \in ]0, 1[$ ,

$$F(\beta, h_c(\beta) + u) \leq C_\beta u^2 \quad \text{avec} \quad C_\beta := \frac{1 + \alpha}{2\beta^2}.$$

Il s'avère que cette constante est optimale : dans le cas général, [CdH13] montre que l'on a  $F(\beta, h_c(\beta) + u) \leq (1 + o(1))C_\beta u^2$  quand  $u \downarrow 0$ , avec une constante  $C_\beta$  qui vérifie  $C_\beta \sim \frac{1+\alpha}{2\beta^2}$  quand  $\beta \downarrow 0$ .

*Démonstration (du Lemme 4.14).* La démonstration repose sur l'inégalité d'entropie du Lemme 1.29 : on a l'inégalité

$$p_\ell = \mathbb{P}(\mathcal{A}_\ell) \geq \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{A}_\ell) \exp \left( - \frac{1}{\tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{A}_\ell)} (\mathcal{H}(\tilde{\mathbb{P}}_\ell | \mathbb{P}) + e^{-1}) \right).$$

Choisissons  $\tilde{\mathbb{P}} = \tilde{\mathbb{P}}_\ell$  la loi de  $(\omega_1 + u/\beta, \dots, \omega_\ell + u/\beta)$ , de sorte que l'on a

$$\tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{A}_\ell) = \tilde{\mathbb{P}} \left( \frac{1}{\ell} \log Z_{\ell,h}^{\beta,\omega} \geq (1 - \varepsilon) F(\beta, h + u) \right) = \mathbb{P} \left( \frac{1}{\ell} \log Z_{\ell,h+u}^{\beta,\omega} \geq (1 - \varepsilon) F(\beta, h + u) \right),$$

où on a utilisé que  $Z_{\ell,h}^{\beta,\omega+u/\beta} = Z_{\ell,h+u}^{\beta,\omega}$ . Ainsi, comme  $\frac{1}{\ell} \log Z_{\ell,h+u}^{\beta,\omega}$  converge  $\mathbb{P}$ -p.s. vers  $F(\beta, h + u) > 0$ , on obtient  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{A}_\ell) = 1$ .

On en conclut que

$$\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \log p_\ell \geq - \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \mathcal{H}(\tilde{\mathbb{P}}_\ell | \mathbb{P}) = - \mathcal{H}(\tilde{\mathbb{P}}_1 | \mathbb{P}),$$

où on a utilisé que la densité de  $\tilde{\mathbb{P}}_\ell$  par rapport à  $\mathbb{P}$  est un produit.

Si on note  $\mathbb{P}_a$ , il reste à calculer l'entropie relative de  $\mathbb{P}_a$  par rapport à  $\mathbb{P}$  (pour  $a = u/\beta$ ).

Pour des variables gaussiennes, on a  $\frac{d\mathbb{P}_a}{d\mathbb{P}}(\omega_1) = e^{a\omega_1 - \frac{1}{2}a^2}$ , donc

$$\mathcal{H}(\mathbb{P}_a | \mathbb{P}) = \mathbb{E}_a \left[ \log \frac{d\mathbb{P}_a}{d\mathbb{P}} \right] = a \mathbb{E}_a[\omega_1] - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2.$$

Cela montre que  $\mathcal{H}(\tilde{\mathbb{P}}_1 | \mathbb{P}) = \frac{1}{2}(u/\beta)^2$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

## 4.5 Moments fractionnaires et déplacement du point critique

# Références

- [AB16] K. S. Alexander and Q. Berger. Local limit theorems and renewal theory with no moments. *Electronic Journal of Probability*, 21 :18 pp., 2016.
- [AB18] K. S. Alexander and Q. Berger. Pinning of a renewal on a quenched renewal. *Electronic Journal of Probability*, 23 :1–48, 2018.
- [AD99] L. Alili and R. Doney. Wiener–hopf factorization revisited and some applications. *Stochastics and Stochastic Reports*, 66(1-2) :87–102, 1999.
- [AHPS21] M. Aizenman, M. Harel, R. Peled, and J. Shapiro. Depinning in integer-restricted gaussian fields and bkt phases of two-component spin models. *arXiv e-prints*, pages arXiv–2110, 2021.
- [BDG01] E. Bolthausen, J.-D. Deuschel, and G. Giacomin. Entropic repulsion and the maximum of the two-dimensional harmonic. *The Annals of Probability*, 29(4) :1670–1692, 2001.
- [BDZ95] E. Bolthausen, J.-D. Deuschel, and O. Zeitouni. Entropic repulsion of the lattice free field. *Communications in mathematical physics*, 170 :417–443, 1995.
- [BDZ00] E. Bolthausen, J. D. Deuschel, and O. Zeitouni. Absence of a wetting transition for a pinned harmonic crystal in dimensions three and larger. *Journal of Mathematical Physics*, 41(3) :1211–1223, 2000.
- [BGT89] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular variation*, volume 27. Cambridge university press, 1989.
- [BP21] N. Berestycki and E. Powell. Gaussian free field, liouville quantum gravity and gaussian multiplicative chaos. *Lecture notes*, 2021.
- [BV01] E. Bolthausen and Y. Velenik. Critical behavior of massless free field at depinning transition. *Communications in Mathematical Physics*, 223 :161–203, 2001.
- [CdH13] F. Caravenna and F. den Hollander. A general smoothing inequality for disordered polymers. *Electron. Commun. Probab.*, 18 :1–15, 2013.
- [CM13] L. Coquille and P. Miłoś. A note on the discrete gaussian free field with disordered pinning on  $F^d$ ,  $d \geq 2$ . *Stochastic Processes and their Applications*, 123(9) :3542–3559, 2013.
- [CSZ17a] F. Caravenna, R. Sun, and N. Zygouras. Polynomial chaos and scaling limits of disordered systems. *Journal of the European Mathematical Society*, 19 :1–65, 2017.
- [CSZ17b] F. Caravenna, R. Sun, and N. Zygouras. Universality in marginally relevant disordered systems. *The Annals of Applied Probability*, 27(5) :3050–3112, 2017.

- [CV00] P. Caputo and Y. Velenik. A note on wetting transition for gradient fields. *Stochastic processes and their applications*, 87(1) :107–113, 2000.
- [Dar23] P. Dario. Upper bounds on the fluctuations of a class of degenerate convex  $\nabla\phi$ -interface models. *arXiv :2302.00547*, 2023.
- [DDG13] A. Dembo, J. Ding, and F. Gao. Persistence of iterated partial sums. *Annales de l’IHP Probabilités et statistiques*, 49(3) :873–884, 2013.
- [DG99] J.-D. Deuschel and G. Giacomin. Entropic repulsion for the free field : Pathwise characterization in  $d \geq 3$ . *Communications in mathematical physics*, 206(2) :447–462, 1999.
- [DK11] R. A. Doney and D. A. Korshunov. Local asymptotics for the time of first return to the origin of transient random walk. *Statistics & Probability Letters*, 81(9) :1419–1424, 2011.
- [Don97] R. A. Doney. One-sided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean. *Probability Theory and Related Fields*, 107(4) :451–465, 1997.
- [Eri70] K. B. Erickson. Strong renewal theorems with infinite mean. *Transactions of the American Mathematical Society*, 151(1) :263–291, 1970.
- [Fel66] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I*. John Wiley & Sons. Inc., New York-London-Sydney, 1966.
- [Fis84] M. E. Fisher. Walks, walls, wetting, and melting. *Journal of Statistical Physics*, 34(5-6) :667–729, 1984.
- [FS81] J. Fröhlich and T. Spencer. The kosterlitz-thouless transition in two-dimensional abelian spin systems and the coulomb gas. *Communications in Mathematical Physics*, 81(4) :527–602, 1981.
- [Fun05] T. Funaki. Stochastic interface models. *Lectures on probability theory and statistics*, 1869 :103–274, 2005.
- [FV17] S. Friedli and Y. Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems : A Concrete Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, 2017.
- [Gia01] G. Giacomin. Aspects of statistical mechanics of random surfaces. *Notes of lectures given at IHP, fall*, 2001.
- [Gia07] G. Giacomin. *Random polymer models*. Imperial College Press, 2007.
- [Gia11] G. Giacomin. *Disorder and Critical Phenomena Through Basic Probability Models : École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XL–2010*. Springer, 2011.
- [GL17] G. Giacomin and H. Lacoin. Pinning and disorder relevance for the lattice gaussian free field. *Journal of the European Mathematical Society*, 20(1) :199–257, 2017.
- [GL18] G. Giacomin and H. Lacoin. Disorder and wetting transition : the pinned harmonic crystal in dimension three or larger. *The Annals of Applied Probability*, 28(1) :577–606, 2018.

- [GT06a] G. Giacomin and F. L. Toninelli. The localized phase of disordered copolymers with adsorption. *CALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 1 :149–180, 2006.
- [GT06b] G. Giacomin and F. L. Toninelli. Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions. *Communications in mathematical physics*, 266 :1–16, 2006.
- [Har74] A. B. Harris. Effect of random defects on the critical behaviour of ising models. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 7(9) :1671, 1974.
- [JP72] N. C. Jain and W. E. Pruitt. The range of random walk. *Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab.*, pages 31–50, 1972.
- [Kin73] J. F. C. Kingman. Subadditive ergodic theory. *The Annals of Probability*, 1(6) :883–899, 1973.
- [Lac10] H. Lacoin. The martingale approach to disorder irrelevance for pinning models. *Electron. Commun. Probab.*, 15 :418–427, 2010.
- [Law13] G. F. Lawler. *Intersections of random walks*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [LL10] G. F. Lawler and V. Limic. *Random walk : a modern introduction*, volume 123. Cambridge University Press, 2010.
- [Nag12] S. V. Nagaev. The renewal theorem in the absence of power moments. *Theory of Probability & Its Applications*, 56(1) :166–175, 2012.
- [PS70] D. Poland and H. A. Scheraga. *Theory of helix-coil transitions in biopolymers : statistical mechanical theory of order-disorder transitions in biological macromolecules*. Academic Press, 1970.
- [Vel06] Y. Velenik. Localization and delocalization of random interfaces. *Probability Surveys*, 3 :112 – 169, 2006.